

Esercitazioni di AL210

A.A. 2017–2018 - Docente: Prof. S. Gabelli

Esercitatore: Dario Spirito

ESERCITAZIONE 6

13 NOVEMBRE 2017

1. Sia G un gruppo.

a) Dimostrare che, per ogni $g \in G$, la mappa

$$\begin{aligned}\gamma_g: G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto gh\end{aligned}$$

è una funzione biunivoca.

b) (*Teorema di Cayley*) Dimostrare che la mappa

$$\begin{aligned}\Gamma: G &\longrightarrow \mathcal{S}(G) \\ g &\longmapsto \gamma_g\end{aligned}$$

è un omomorfismo di gruppi iniettivo.

2. Dato un gruppo finito G , sia $\eta(G)$ il minimo intero n tale che G è isomorfo ad un sottogruppo di S_n .

a) Dimostrare che $\eta(G) \leq |G|$.

b) Dimostrare che $\eta(\mathbb{Z}_n) = n$ se e solo se n è potenza di un numero primo.

c) Determinare $\eta(D_p)$, dove p è un numero primo.

d) Determinare $\eta(S_n)$ e $\eta(A_n)$.

e) Dimostrare che $\eta(Q) = 8$.

3. Sia G un gruppo di ordine $2n$, dove n è dispari. Dimostrare che G ha un sottogruppo di ordine n .

4. Determinare la classe di isomorfismo del gruppo degli automorfismi interni di S_n , A_n , D_n , \mathbb{Z}_n , Q e $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times D_3$.

5. Determinare la classe di isomorfismo dei sottogruppi di Sylow di D_4 , D_5 , D_6 , A_4 e S_4 .

6. Determinare tutti i sottogruppi di Sylow di D_5 , D_6 e A_4 .

7. Verificare l'equazione delle classi per i gruppi Q , D_4 , S_3 , S_4 , A_4 e \mathbb{Z}_{12} .

8. Dimostrare che un gruppo abeliano finito è isomorfo al prodotto diretto dei suoi sottogruppi di Sylow.

9. Sia G un gruppo abeliano. Dimostrare che la mappa

$$\begin{aligned} \Lambda :: \mathbb{Z}_2 &\longrightarrow \text{Aut}(G) \\ \bar{0} &\longmapsto \text{id}, \\ \bar{1} &\longmapsto \lambda: G \longrightarrow G \\ &\quad g \longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

è un omomorfismo di gruppi.

10. Per i seguenti gruppi, trovare un elemento di ordine p per ogni primo p che divide l'ordine del gruppo:

$$D_4, \quad D_5, \quad A_4, \quad S_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \quad Q, \quad A_7, \quad GL_2(\mathbb{F}_{11}).$$