Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL210

A.A. 2017–2018 - Docente: Prof. S. Gabelli

Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 7
20 novembre 2017

1. Determinare quali delle seguenti applicazioni $G \times X \longrightarrow X$, $(g, x) \mapsto g * x$, sono azioni, e in particolare quali sono fedeli e quali sono transitive.
   a) $G = X$, $g * x := gx$
   b) $G = X$, $g * x := g^{-1}x$
   c) $G = X = D_5$, $g * x := \sigma g x$
   d) $G = (\mathbb{R}, +)$, $X = \mathbb{R}$, $g * x := g + x + 2$
   e) $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $X = \mathbb{R}$, $g * x := gx$
   f) $G = (\mathbb{R}, +)$, $X = \mathbb{R}$, $g * x := gx$
   g) $G = (\mathbb{R}, +)$, $X = \mathbb{R}^2$, $r * (x, y) = (x + ry, y)$.

2. Dimostrare che, se un gruppo G agisce su X, allora ogni sottogruppo di G agisce su X. Che rapporto c'è tra le orbite di X rispetto a G e le orbite rispetto ad H?

3. Sia G un gruppo finito che agisce transitivamente su X, dove $|X| > 1$.
   a) Dimostrare che X è finito.
   b) Dimostrare che esiste un $g \in G$ che non fissa alcun elemento di X.
   c) Dimostrare se, se $H \subsetneq G$ è un sottogruppo, allora $G \neq \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$.

4. Sia $X(n, k)$ l'insieme dei sottogruppi di $\{1, \ldots, n\}$ di cardinalità k, con $k \leq n$.
   a) Dimostrare che la seguente mappa è un'azione:
   $$\begin{aligned} S_n \times X(n,k) &\longrightarrow X(n,k) \\ (\sigma, \{a_1, \ldots, a_n\}) &\longmapsto \{\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)\}. \end{aligned}$$
   b) Descrivere esplicitamente l'azione di (12) e di (123) su $X(4, 2)$.

5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n < \infty$ su un campo K, e sia $\mathrm{GL}_n(K)$ l'insieme delle matrici invertibili di ordine n su K.
   a) Dimostrare che la seguente mappa è un'azione:
   $$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(K) \times V &\longrightarrow V \\ (A, \mathbf{v}) &\longmapsto A\mathbf{v}. \end{aligned}$$
   b) Dimostrare che esistono esattamente due orbite.

c) Descrivere lo stabilizzatore di un vettore $\mathbf{v}$.

d) Determinare una matrice che non appartiene a nessuno stabilizzatore.

6. Siano V e K come nell'esercizio precedente. Dimostrare che la mappa

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(K) \times (V \times V) &\longrightarrow V \times V \\ (A, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &\longmapsto (A\mathbf{v}, A\mathbf{w}) \end{aligned}$$

è un'azione, e determinarne le orbite.

7. Sia G l'insieme delle isometrie del piano reale;[1] sia X_2 l'insieme delle coppie di punti del piano e sia X_3 l'insieme delle terne di punti.
   a) Dimostrare che G agisce in modo naturale su X_2 e X_3.
   b) Determinare l'orbita e lo stabilizzatore di ogni elemento di X_2.
   c) Dimostrare che esiste una funzione biunivoca naturale $X_2/G \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.
   d) Caratterizzare quando due elementi di X_3 sono nella stessa orbita.

8. Sia $G := \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{Z}_5, \det(M) = 1 \right\}$.
   a) Dimostrare che G è un gruppo.
   b) Dimostrare che G agisce in modo naturale su $(\mathbb{Z}_5)^2$.
   c) Determinare il numero di orbite di quest'azione.
   d) Cosa succede se si sostituisce $\mathbb{Z}_5$ con un altro $\mathbb{Z}_p$ (p primo)?

9. Sia G un gruppo che agisce su X. Dimostrare che, se $x, y \in X$ sono nella stessa orbita, i sottogruppi $\mathrm{Stab}(x)$ e $\mathrm{Stab}(y)$ sono coniugati.

10. Dimostrare che un gruppo di ordine 12 o 56 ha un Sylow normale.

11. Sia G un gruppo finito e H un suo sottogruppo. Sia $X := \{gH \mid g \in G\}$ l'insieme dei laterali sinistri di H. Sia $n := [G : H] = |X|$
    a) Dimostrare che la mappa $g * g'H := gg'H$, è un'azione di G su X.
    b) Usare questa azione per definire un omomorfismo naturale $\Psi : G \longrightarrow S_n$.
    c) Dimostrare che $\ker \Psi$ è il più grande sottogruppo normale contenuto in H.

12. Un gruppo è *semplice* se non ha sottogruppi normali non banali. Dimostrare che:
    a) gli unici p-gruppi finiti semplici sono i $\mathbb{Z}_p$;
    b) S_n non è semplice per ogni $n > 2$;
    c) se G è semplice, G non è un prodotto diretto (non banale);
    d) se G ha un sottogruppo $H \neq \{e\}$ tale che $1 < [G : H] \leq 4$, allora G non è semplice.

[1] Una mappa $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è un'*isometria* se $d(x, y) = d(\phi(x), \phi(y))$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^2$.