Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL210

A.A. 2017–2018 - Docente: Prof. S. Gabelli

Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 8
27 novembre 2017

1. Determinare se i seguenti insiemi sono anelli, e in caso affermativo determinare se sono commutativi e/o unitari.

   a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ b) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ c) $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$

   d) $(\mathbb{Z}, \cdot, \hat{})$, dove $\hat{}$ è l'elevazione a potenza ($a\hat{}b := a^b$)

   e) $(\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f$ ha supporto compatto$, +, \cdot)$

2. Dati i seguenti insiemi A e B (con le operazioni naturali), determinare se B è un sottoanello e/o un ideale di A.

   a) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Q}$

   b) $A = M_n(\mathbb{R})$, $B = \{M \in A \mid \det(M) = 0\}$

   c) $A = M_n(\mathbb{R})$, $B = \{M \in A \mid M\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$ (dove $\mathbf{v}$ è un fissato elemento di $\mathbb{R}^n$).

   d) $A = \mathbb{C}$, $B = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

   e) $A = \{$funzioni $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$, $B = \{$funzioni continue$\}$.

   f) $A = \{$funzioni continue $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$, $B = \{f \in A \mid f(1) = 0\}$.

   g) $A = \{$funzioni $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}\}$, $B = \{f \in A \mid f \equiv 0$ o ha un numero finito di zeri$\}$.

3. Dimostrare che $4\mathbb{Z}_{12}$ è un anello unitario, ma che $2\mathbb{Z}_{12}$ non lo è.

4. Determinare l'insieme degli elementi invertibili dei seguenti anelli:

   a) $\mathbb{Z}$ c) $\mathbb{C}$ e) $M_n(\mathbb{Z})$

   b) $\mathbb{Q}$ d) $M_n(\mathbb{R})$ f) $\mathbb{Q}[X]$

   g) $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ i) $A := \mathbb{Z}_{(12)} := \{\frac{a}{12^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

   h) $\mathbb{Z}[\sqrt{3}i] := \{a + b\sqrt{3}i \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ j) $A := \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, 3 \nmid b\}$

5. Sia d un intero positivo, e sia $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] := \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Dimostrare che $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ è un campo.

6. Sia $a \in A$. L'*ideale (destro) principale* generato da a è l'insieme $aA := \{ab \mid b \in A\}$.

   a) Dimostrare che aA è un ideale.

   b) Dimostrare che, se A è un anello unitario, allora aA è il più piccolo ideale destro contenente a.

   c) Dimostrare che, se A è commutativo e unitario, allora $aA \cdot bA = abA$.

7. Sia $A := \mathbb{Q}[X, Y]$. Dimostrare che l'insieme $I := \{f \in \mathbb{Q}[X, Y] \mid f$ non ha termine noto$\}$ è un ideale di A; determinare un insieme di generatori per I e dimostrare che I non è un ideale principale.

8. Sia A un anello unitario. Un elemento $a \in A$ è *idempotente* se $a^2 = a$. Mostrare che:
   a) se a è idempotente, allora $1 - a$ è idempotente;
   b) se a è idempotente e $a \neq 1$, allora a è un divisore dello zero;
   c) se a è idempotente, allora $A \simeq aA \times (1 - a)A$.

9. Un anello è *booleano* se ogni elemento è idempotente. Dimostrare che, se A è booleano, allora $a + a = 0$ e $ab = ba$ per ogni $a, b \in A$.

10. Sia A un anello e sia I un ideale. Il *radicale* di I è l'insieme $\mathrm{rad}(I) := \{a \in A \mid a^n \in I$ per un $n \in \mathbb{N}\}$.
    a) Dimostrare che $\mathrm{rad}(\mathrm{rad}(I)) = \mathrm{rad}(I)$.
    b) Dimostrare che, se A è commutativo, allora $\mathrm{rad}(I)$ è un ideale.
    c) Dimostrare che $\mathrm{rad}(I)$ è la controimmagine dell'insieme degli elementi nilpotenti di A/I.
    d) Dimostrare che, se $A = M_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{rad}(I)$ non è un ideale.

11. Determinare se i seguenti sono omomorfismi di anelli e, in caso affermativo, determinare nucleo e immagine e definire l'isomorfismo canonico dato dal teorema fondamentale di omomorfismo.
    a) $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$, $k \mapsto \overline{k}$.
    b) $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[X]$, $k \mapsto kX$
    c) $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{C}[X]$, $k \mapsto k + X$
    d) $\mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}_n[X]$, $\sum a_i X^i \mapsto \sum \overline{a_i} X^i$
    e) $\mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{C}$, $f \mapsto f(\sqrt{5})$
    f) $\mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{Z}_4$, $a + bi \mapsto \overline{a^2 + b^2}$
    g) $\{$funzioni $C^1\} \longrightarrow \{$funzioni continue$\}$, $f \mapsto f'$.

12. Sia G un gruppo e A un anello unitario. Definiamo $A[G]$ come l'insieme delle somme formali finite $\sum_{g \in G} a_g g$, con $a_g \in A$. Definiamo $+$ e $\cdot$ in questo modo:
$$\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) + \left(\sum_{g \in G} b_g g\right) = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g$$
$$\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) \cdot \left(\sum_{g \in G} b_g g\right) = \sum_{g \in G} \left(\sum_{h_1 h_2 = g} a_{h_1} b_{h_2}\right) g.$$
    a) Dimostrare che $A[G]$ è un anello.
    b) Trovare un omomorfismo di anelli iniettivo $A \longrightarrow A[G]$.
    c) Dimostrare che $A[G]$ è commutativo se e solo se lo sono sia A che G.
    d) Dimostrare che, se $g \in G$ ha ordine finito, allora $1 + g$ e $1 - g$ sono divisori dello zero.