Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL210

A.A. 2017–2018 - Docente: Prof. S. Gabelli

Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 9
11 dicembre 2017

1. Determinare se i seguenti ideali sono primi e/o massimali:

   (a) $10\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$

   (b) $4\mathbb{Z}$ in $2\mathbb{Z}$

   (c) $2\mathbb{Z} \times 5\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

   (d) $13\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

   (e) (X, Y) in $\mathbb{Q}[X, Y, Z]$

   (f) $5\mathbb{Z}[X]$ in $\mathbb{Z}[X]$

   (g) $(5, X)\mathbb{Z}[X]$ in $\mathbb{Z}[X]$

   (h) $(X, X + 1)$ in $\mathbb{Q}[X]$

   (i) $(X^2 - 1)$ in $\mathbb{Q}[X]$

   (j) $(X^2 - 5)$ in $\mathbb{Q}[X]$

   (k) $(X^2 - 5)$ in $\mathbb{C}[X]$

   (l) $(X^3 + 2X + 1)$ in $\mathbb{Z}_7[X]$

   (m) $3\mathbb{Z}_{(3)}$ in $\mathbb{Z}_{(3)} := \{a/b \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Z}, 3 \text{ non divide } b\}$

   (n) $\{f \in A \mid f(1) = 0\}$ in $A := \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ è continua}\}$

   (o) $\{f \in A \mid f(1) = f(2) = 0\}$ in A

   (p) $(\overline{X}, \overline{Y})$ in $\mathbb{Z}[X, Y]/(X^2, XY, Y^3)$

2. Determinare il quoziente tra l'anello e gli ideali dell'esercizio precedente nei casi (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g), (n), (o), (p).

3. Sia $\phi : A \longrightarrow B$ un omomorfismo di anelli e I un ideale di B.

   a) Dimostrare che $\phi^{-1}(I)$ è un ideale di A.

   b) Dimostrare che, se I è primo e $\phi(A) \nsubseteq I$, allora $\phi^{-1}(I)$ è un ideale primo.

   c) Dare un esempio in cui $\phi(A) \nsubseteq I$ e I è massimale, ma $\phi^{-1}(I)$ no.

4. Determinare tutti gli ideali di $\mathbb{Z}$ e determinare quali sono primi e quali sono massimali. Per ogni I e J trovare anche $I + J$ e $I \cap J$.

5. Determinare gli ideali primi e i massimali di $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_{15}$, $\mathbb{Z}_{68}$ e $\mathbb{Z}_{105}$.

6. Sia A un anello commutativo unitario. Dimostrare che, per ogni ideale I, il radicale di I è contenuto nell'intersezione degli ideali primi che contengono I.

7. Dimostrare che la seguente applicazione è un omomorfismo di anelli e determinarne nucleo e immagine:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}\colon &\longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}} \\ n &\longmapsto (n + 3\mathbb{Z}, n + 4\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

8. Siano P, Q ideali primi, e supponiamo che $P \nsubseteq Q$ e $Q \nsubseteq P$.

a) Dimostrare che $P \cap Q$ non è un ideale primo.

b) Dimostrare che $\mathrm{rad}(P \cap Q) = P \cap Q$.

9. Sia $f_a(X) := X^2 + aX + 7 \in \mathbb{Z}_{11}[X]$.

   a) Determinare per quali valori di a il polinomio f_a è irriducibile.

   b) Determinare per quali valori di a il polinomio f_a genera un ideale primo.

   c) Dimostrare che, per questi valori di a, il quoziente $\mathbb{Z}_7[X]/(f_a)$ è un campo contenente propriamente $\mathbb{Z}_7$, e che in esso f_a ha una radice.

   d) Determinare l'inverso di $X + (f_a)$.

10. Sia p un numero primo, e siano $A := M_2(\mathbb{Z})$, $A_p := M_2(\mathbb{Z}_p)$, $I_p := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid a, b, c, d \in p\mathbb{Z}\}$.

    a) Mostrare che I_p è un ideale di A.

    b) Mostrare che A_p non è un corpo.

    c) Mostrare che A_p non ha ideali bilateri propri.

    d) Mostrare che $A_p \simeq A/I_p$.

    e) Dedurne che I_p è un ideale massimale di A.

11. Sia A il prodotto diretto degli anelli $\mathbb{Z}_p$, per p che varia tra i numeri primi.

    a) Determinare se A è un anello unitario.

    b) Determinare se A è integro.

    c) Determinare la caratteristica di A.

    d) Determinare un ideale primo di A.

    e) Determinare se è possibile trovare un omomorfismo unitario iniettivo $\mathbb{Z} \longrightarrow A$, e in caso affermativo esplicitarlo.

12. Sia $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri primi, e sia

$$B := \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}_p := \{(a_p)_{p \in \mathbb{P}} \mid a_p \neq 0 \text{ solo per un numero finito di primi}\}.$$

    a) Dimostrare che B è un anello.

    b) Determinare se B è un anello unitario.

    c) Determinare se B è integro.

    d) Determinare la caratteristica di B.

    e) Determinare se è possibile trovare un omomorfismo unitario iniettivo $\mathbb{Z} \longrightarrow B$, e in caso affermativo esplicitarlo.

13. Sia p un numero primo, e sia $G_p := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \zeta^{p^n} = 1 \text{ per un } n \in \mathbb{N}\}$. Sia $\circ$ l'operazione nulla, ovvero sia $z \circ w = 0$ per ogni $z, w \in G_p$. Dimostrare che $(G_p, \cdot, \circ)$ è un anello commutativo senza ideali massimali. È un anello unitario?

14. Per ognuna delle seguenti coppie di elementi α, β di $\mathbb{Z}[i]$, determinare un generatore degli ideali (α, β) e $(\alpha) \cap (\beta)$ e trovare un'identità di Bézout:

    a) $\alpha = 4 + i, \quad \beta = 2 + i;$

    b) $\alpha = 6 + 7i, \quad \beta = 1 + i;$

    c) $\alpha = 4 - i, \quad \beta = 3 + 2i;$

    d) $\alpha = 10 - 2i, \quad \beta = 4 - 12i;$

    e) $\alpha = 67 - 36i, \quad \beta = 7 + 4i;$

    f) $\alpha = 7 + 2i, \quad \beta = 3 - i;$

    g) $\alpha = 19 + 3i, \quad \beta = 5;$

    h) $\alpha = 5 + 7i, \quad \beta = 9 + i;$

    i) $\alpha = 15 - 8i, \quad \beta = 14 + 5i.$

15. Fattorizzare i seguenti elementi in $\mathbb{Z}[i]$:

    a) $3 - 2i;$

    b) $6 + 5i;$

    c) $14 - 2i;$

    d) $12 + 3i;$

    e) $1 + 17i;$

    f) $4 + 5i;$

    g) $13;$

    h) $57i.$

16. Per ognuna delle seguenti coppie di elementi α, β di $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, determinare un generatore degli ideali (α, β) e $(\alpha) \cap (\beta)$ e trovare un'identità di Bézout:

    a) $\alpha = 3 - \sqrt{2}, \quad \beta = 5 + 3\sqrt{2};$

    b) $\alpha = \sqrt{2} - 1, \quad \beta = 4 + 9\sqrt{2};$

    c) $\alpha = 13 + 2\sqrt{2}, \quad \beta = 14 - 3\sqrt{2};$

    d) $\alpha = 6 + 2\sqrt{2}, \quad \beta = 3 - \sqrt{2};$

    e) $\alpha = 42 - 5\sqrt{2}, \quad \beta = 2 + 6\sqrt{2};$

    f) $\alpha = 44, \quad \beta = 13 - 8\sqrt{2}.$

17. Sia K un campo e $X_1, \ldots, X_n$ indeterminate su K. Dimostrare che l'anello dei polinomi $K[X_1, \ldots, X_n]$ è ad ideali principali se e solo se $n = 1$.

18. Sia $f \in \mathbb{Q}[X]$. Dimostrare che il quoziente $\mathbb{Q}[X]/(f)$ può essere scritto come prodotto diretto di un numero finito di anelli con un solo ideale massimale.