Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL210

A.A. 2019–2020 - Docente: Prof. F. Tartarone
Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 1
27 settembre 2019

1. Dimostrare che, per ogni n, l'insieme $\mathbb{Z}_n$ delle classi di resto è un gruppo rispetto all'addizione.

2. Dimostrare che, per ogni n, l'insieme delle unità di $\mathbb{Z}_n$ è un gruppo rispetto alla moltiplicazione. È vero che $\mathbb{Z}_n$ è un gruppo rispetto alla moltiplicazione?

3. Sia $\circ$ l'operazione definita da $a \circ b := a^b$. Dimostrare che $(\mathbb{R}^+, \circ)$ non è un gruppo.

4. Sia X un insieme e $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X. Determinare se $\mathcal{P}(X)$ è un gruppo rispetto all'operazione di differenza simmetrica.

5. Sia X un insieme. Dimostrare che l'insieme delle funzioni di X in sé, con l'usuale composizione di funzioni, non è un gruppo.

6. Sia X un insieme e sia $\mathcal{S}(X)$ l'insieme delle funzioni biunivoche di X in sé. Per ogni $\phi \in \mathcal{S}(X)$, sia $\text{fix}(\phi) := \{x \in X \mid \phi(x) = x\}$.
   a) Dimostrare che $(\mathcal{S}(X), \circ)$ è un gruppo.
   b) Dimostrare che, per ogni $Y \subseteq X$, l'insieme $\{\phi \in \mathcal{S}(X) \mid Y \subseteq \text{fix}(\phi)\}$ è un sottogruppo.
   c) Dimostrare che l'insieme $\{\phi \in \mathcal{S}(X) \mid X \setminus \text{fix}(\phi) \text{ è finito}\}$ è un sottogruppo.
   d) L'insieme $\{\phi \in \mathcal{S}(X) \mid \text{fix}(\phi) = Y\}$ è un sottogruppo?

7. Sia $H := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid 7a + 5b = 0\}$. Dimostrare che H è un sottogruppo di $(\mathbb{R}^2, +)$. Cosa succede se si prende $H' := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid 7a + 5b = 1\}$?

8. Dimostrare che l'insieme delle isometrie del piano è un gruppo. Determinare se l'insieme delle traslazioni e l'insieme delle riflessioni sono suoi sottogruppi.

9. Date un intero $n \geq 1$, sia $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici di ordine n a coefficienti reali con determinante non nullo, con l'operazione data dal prodotto righe per colonne.
   a) Dimostrare che $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ è un gruppo.
   b) Determinare se l'insieme $\text{SL}_n(R)$ delle matrici di determinante 1 è un sottogruppo.
   c) Determinare se l'insieme $T_n(\mathbb{R})$ delle matrici triangolari è un sottogruppo.

10. Sia G un gruppo e $g \in G$. Sotto quali ipotesi l'insieme $\{g^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1, g, g^2, \ldots\}$ è un sottogruppo di G?

11. Sia G un gruppo abeliano e siano a, b elementi di ordine rispettivamente n ed m. Dimostrare che l'ordine di ab è finito e divide $\mathrm{mcm}(a, b)$.

12. Determinare per quali dei seguenti n il gruppo delle unità di $\mathbb{Z}_n$ è ciclico: 2, 4, 5, 7, 8, 9, 15, 17, 18.

13. Sia
$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$
Dimostrare che H è un sottogruppo ciclico di $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$. Cosa succede se le matrici sono considerate a valori in $\mathbb{Z}_5$?

14. Dimostrare che $(\mathbb{Q}, +)$ non è un gruppo ciclico.

15. Siano A, B due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Dimostrare che l'insieme
$$H(A, B) := \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & b \end{pmatrix} : a \in A, b \in B, x \in \mathbb{R} \right\}$$
è un sottogruppo di $M_2(\mathbb{R})$ se e solo se A e B sono sottogruppi di $(\mathbb{R}, \cdot)$. Può essere un gruppo ciclico?

16. Determinare se i seguenti sottoinsiemi sono sottogruppi di $(\mathbb{R}, +)$:

    a) $\mathbb{Q}$;
    b) $\mathbb{R}^{\geq 0}$;
    c) $\mathbb{R} \setminus \{\pm 5\}$;
    d) $\{a + \pi \mid a \in \mathbb{Z}\}$;
    e) $\{a + b\pi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$;
    f) $\{a + b\sqrt{3} + c\sqrt{5} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$.

17. Determinare l'ordine dei seguenti elementi:

    a) 2 in $(\mathbb{Z}_6, +)$;
    b) 12 in $(\mathbb{Z}_{75}, +)$;
    c) 10 in $(\mathbb{Z}_{99}, \cdot)$;
    d) 3 in $(\mathbb{Q}, +)$;
    e) $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_5)$;
    f) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $n \mapsto -n$ in $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$;
    g) σ^2 in D_8;
    h) $\sigma\tau$ in D_4.

18. Scrivere le seguenti permutazioni come prodotto di cicli disgiunti e come prodotto di trasposizioni e dire se sono pari o dispari:

    a) (12)(34)(567)
    b) (12)(34)(567)(31)
    c) (123)(312)
    d) (12368)(348)(57)(243)(423)(57)(834)(63218)
    e) (12)(37)(71)
    f) (45)(45)(45)(451)