Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL210

A.A. 2019–2020 - Docente: Prof. F. Tartarone
Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 10
13 dicembre 2019

1. Sia A un anello unitario e sia $f : A \longrightarrow A$ un endomorfismo di anelli.
   a) Dimostrare che, se A è un dominio, allora f è unitario oppure è l'endomorfismo nullo.
   b) Dare un controesempio nel caso in cui A non è un dominio.

2. Siano K, K' due campi. Dimostrare che se $K[X]$ e $K'[X]$ sono isomorfi (come anelli) allora K e K' sono isomorfi. La stessa dimostrazione funziona se K e K' sono anelli (non necessariemente campi)?

3. Sia $\mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss, e sia N la mappa

$$\begin{aligned} N \colon \mathbb{Z}[i] &\longrightarrow \mathbb{N}, \\ a + bi &\longmapsto a^2 + b^2. \end{aligned}$$

   Dimostrare che $N(xy) = N(x)N(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{Z}[i]$, e dedurne che se $N(x)$ è un numero primo allora x è un elemento primo di $\mathbb{Z}[i]$.

4. Sia p un numero primo dispari. Dimostrare che le seguenti proprietà sono equivalenti:
   (i) p è riducibile in $\mathbb{Z}[i]$;
   (ii) $p \equiv 1 \bmod 4$;
   (iii) $p = a^2 + b^2$ per qualche $a, b \in \mathbb{N}$.

   Dimostrare che, in questo caso, a e b sono unici (a meno di scambiarli).

5. Fattorizzare i seguenti elementi in $\mathbb{Z}[i]$:

   a) $4 + 3i$
   b) $1 + 3i$
   c) $7 - i$
   d) $1 + 2i$
   e) $14 + 7i$
   f) $9 - 16i$
   g) $4 - 4i$
   h) $5 - 10i$
   i) $7 - 6i$
   j) $12 + 3i$
   k) $1 + 17i$
   l) $4 + 5i$
   m) 13
   n) $57i$

6. Per ognuna delle seguenti coppie di elementi, determinare un'identità di Bézout e un minimo comune multiplo in $\mathbb{Z}[i]$:

a) $1+4i, \quad 1-4i$

b) $2-2i, \quad 7+7i$

c) $10, \quad 1+7i$

d) $3+i, \quad 11-3i$

e) $7+2i, \quad 3-i$

f) $19+3i, \quad 5$

g) $5+7i, \quad 9+i$

h) $15-8i, \quad 14+5i$

7. Per ognuno dei seguenti ideali I di $\mathbb{Z}[i]$, stabilire se $\alpha + I$ è invertibile in $\mathbb{Z}[i]/I$ e in caso affermativo calcolarne l'inverso.

   a) $I = (3+2i), \quad \alpha = 2+i$

   b) $I = (5+i), \quad \alpha = 1+i$

   c) $I = (4-3i), \quad \alpha = 1+2i$

   d) $I = (1+3i, 3+5i), \quad \alpha = 6-7i$

8. Per ognuna delle seguenti coppie di elementi di $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, determinare un'identità di Bézout.

   a) $3-\sqrt{2}, \quad 5+3\sqrt{2}$

   b) $\sqrt{2}-1, \quad 4+9\sqrt{2}$

   c) $13+2\sqrt{2}, \quad 14-3\sqrt{2}$

   d) $44, \quad 13-8\sqrt{2}$

9. Consideriamo il dominio $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.

   a) Dimostrare che 2, $1+\sqrt{-7}$ e $1-\sqrt{-7}$ sono elementi irriducibili.

   b) Dimostrare che 2 non è un elemento primo.

   c) Dedurne che $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ non è a fattorizzazione unica.

10. Determinare se ognuno dei seguenti elementi è invertibile, e in caso affermativo determinarne l'inverso.

    a) $X + (X^2+X-1)$ in $\mathbb{Z}_5[X]/(X^2+X-1)$

    b) $X+1+(X^2+X+1)$ in $\mathbb{Z}_7[X]/(X^2+X+1)$

    c) $X^2+1+(X^3+X+1)$ in $\mathbb{Z}_{11}[X]/(X^3+X+1)$

    d) $X^4-1+(X^4+2)$ in $\mathbb{Z}_3[X]/(X^4+2)$