Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL210

A.A. 2019–2020 - Docente: Prof. F. Tartarone

Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 11
20 dicembre 2019

II esonero, A.A. 2017/2018

1. Sia $f(X) := X^3 + 2X^2 + 4X + 2 \in \mathbb{Z}_5[X]$.
   a) Mostrare che l'anello quoziente $A := \mathbb{Z}_5[X]/\langle f(X)\rangle$ è un campo.
   b) Determinare l'inverso in A della classe di $g(X) := X^3 + 3X^2 + 2X + 3$.
   c) Mostrare che A ha un numero finito di elementi.

2. Sia $p \in \mathbb{Z}$ un numero primo. Nell'anello $\mathbb{Z}[X]$ si consideri l'insieme I dei polinomi i cui coefficienti sono tutti multipli di p.
   a) Verificare che I è un ideale principale di $\mathbb{Z}[X]$.
   b) Stabilire se I è un ideale primo o massimale.

3. Nell'anello $\mathbb{Z}[i]$ siano $\alpha := 1+5i$, $\beta := 4-6i$ e $I := \langle \alpha, \beta\rangle$ l'ideale da essi generato.

   Determinare la caratteristica dell'anello quoziente $A := \mathbb{Z}[i]/I$ e stabilire se A è un campo.

4. Determinare tutti gli ideali dell'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/(14)$ e stabilire quali di essi sono primi.

5. a) Dimostrare che 5 è un elemento irriducibile ma non primo di $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$.
   b) Determinare un elemento di $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ che ha due fattorizzazioni in elementi irriducibili non associati.

6. Nell'anello $\mathbb{Q}[X, Y]/(X^2Y)$, determinare un elemento nilpotente e uno zerodivisore che non è nilpotente.

Appello B, A.A. 2017/2018 (esercizi sui gruppi)

7. Sia G un gruppo commutativo e sia $T(G)$ l'insieme degli elementi di G che hanno ordine finito.
   a) Dimostrare che $T(G)$ è un sottogruppo di G.
   b) Determinare $T(G)$ quando $G := (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ è il gruppo moltiplicativo dei numeri complessi non nulli.

c) Dimostrare che se $\varphi : G \longrightarrow G'$ è un omomorfismo di gruppi, allora $\varphi(T(G)) \subseteq T(G')$.

8. Sia D_5 il gruppo delle isometrie del pentagono regolare (gruppo diedrale di grado 5). Determinare esplicitamente tutti gli omomorfismi di gruppo $(D_5, \circ) \longrightarrow (\mathbb{Z}_{10}, +)$.

9. Consideriamo i seguenti elementi di S_6:

$$\begin{aligned}\sigma_1 :=& (145)(23)(53)(461)\\ \sigma_2 :=& (3164)(2351)(62)\\ \sigma_3 :=& (12345)(16)(23)(1234).\end{aligned}$$

a) Stabilire se i σ_i sono in A_6.

b) Determinare se σ_i e σ_j sono coniugate (per $i, j \in \{1, 2, 3\}$) e in caso affermativo determinare un $\gamma \in S_6$ tale che $\sigma_i = \gamma\sigma_j\gamma^{-1}$.

Altri esercizi

10. Sia d un intero privo di quadrati e diverso da 0 e 1, e consideriamo l'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. (Se $d < 0$, $\sqrt{d} := i\sqrt{-d}$.) La *norma* in A è la funzione

$$\begin{aligned}N\colon \mathbb{Z}[\sqrt{d}] &\longrightarrow \mathbb{Z}\\ a + b\sqrt{d} &\longmapsto a^2 - b^2 d\end{aligned}$$

a) Dimostrare che x divide $N(x)$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

b) Dimostrare che $N(xy) = N(x)N(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

c) Dimostrare che x è un'unità di $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ se e solo se $N(x) = \pm 1$.

d) Siano a, b interi coprimi. Dimostrare che $(a+b\sqrt{d})\mathbb{Z}[\sqrt{d}] \cap \mathbb{Z} = N(a+b\sqrt{d})\mathbb{Z}$.

11. Sia $d > 1$ un intero dispari e sia $A := \mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$.

a) Determinare un elemento x di norma $d + 1$.

b) Dimostrare che 2 è un elemento irriducibile ma non primo di A.

c) Dimostrare che $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ non è a fattorizzazione unica.

12. Consideriamo il dominio $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

a) Verificare che non esistono elementi di norma 3.

b) Dedurne che 3 è irriducibile in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

c) Dimostrare che 3 è primo in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.