Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL210

A.A. 2019–2020 - Docente: Prof. F. Tartarone

Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 2

4 ottobre 2019

1. In ognuno dei seguenti casi, scrivere esplicitamente le classi laterali destre di H in G e determinare l'indice $[G : H]$.

   a) $G = \mathbb{Z}_6$, $H = \langle [3] \rangle$;

   b) $G = \mathbb{Z}_{60}$, $H = \langle [10], [15] \rangle$;

   c) $G = U(\mathbb{Z}_8)$, $H = \langle [3] \rangle$;

   d) $G = D_8$, $H = \langle \sigma^2 \rangle$;

   e) $G = D_6$, $H = \langle \sigma^2, \tau\sigma^3 \rangle$;

   f) $G = S_5$, $H = \langle (123)(45) \rangle$;

   g) $G = S_4$, $H = \langle (12), (34) \rangle$.

2. Sia G un gruppo di ordine $2n$ e H un sottogruppo di G di ordine n. Dimostrare che H è normale in G.

3. Sia G un gruppo e H, N due suoi sottogruppi.

   a) Dimostrare che, se H e N sono normali in G, allora $H \cap N$ è normale in G.

   b) Dimostrare che se N è normale in G allora $N \cap H$ è normale in H.

   c) È vero che se N è normale in G allora $N \cap H$ è sempre normale in G?

4. Sia G un gruppo e $\mathcal{H} := \{H_i\}_{i \in I}$ una famiglia di suoi sottogruppi.

   a) Dare un esempio in cui $\bigcup_i H_i$ non è un sottogruppo di G e uno in cui lo è.

   b) Supponiamo che $\mathcal{H}$ sia totalmente ordinato in modo tale che $H_i \subseteq H_j$ se $i \leq j$. Dimostrare che $\bigcup_i H_i$ è un sottogruppo di G.

   c) Scrivere $(\mathbb{Q}, +)$ come unione crescente di una famiglia di sottogruppi propri. È possibile scegliere questi sottogruppi in modo che siano tutti ciclici?

5. Siano a, b due interi positivi.

   a) Se $a = b$, determinare tutti gli isomorfismi di $\mathbb{Z}_a$ in sé.

   b) Determinare tutti gli omomorfismi iniettivi $\mathbb{Z}_a \longrightarrow \mathbb{Z}_b$.

   c) Determinare tutti gli omomorfismi suriettivi $\mathbb{Z}_a \longrightarrow \mathbb{Z}_b$.

   d) Calcolare il numero degli omomorfismi $\mathbb{Z}_a \longrightarrow \mathbb{Z}_b$.

6. Sia D_4 il gruppo delle simmetrie di un quadrato.

   a) Elencare tutti gli elementi di D_4 ed indicare il loro ordine.

   b) Determinare tutti i sottogruppi di D_4, specificando quali sono normali.

   c) Data una trasposizione τ, elencare tutte le classi laterali (destre e sinistre) del sottogruppo ciclico generato da τ.

7. Svolgere l'esercizio precedente anche per i gruppi diedrali D_5 e D_6.

8. Determinare tutti i sottogruppi di $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_{10}$, $\mathbb{Z}_{12}$, $U(\mathbb{Z}_4)$, $U(\mathbb{Z}_8)$, $U(\mathbb{Z}_{13})$, e A_4.

9. Sia $\mathbb{C}_\infty$ l'insieme delle radici dell'unità in $\mathbb{C}$.
   a) Dimostrare che $\mathbb{C}_\infty$ è un sottogruppo di $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.
   b) Dimostrare che l'ordine di ogni elemento di $\mathbb{C}_\infty$ è finito.
   c) Sia ϕ la mappa
   $$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ q &\longmapsto e^{2\pi i q}. \end{aligned}$$
   Dimostrare che ϕ è un omomorfismo da $(\mathbb{Q}, +)$ a $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, e determinarne nucleo e immagine.
   d) Dimostrare che $\mathbb{C}_\infty$ è isomorfo a $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
   e) Cosa succede se si estende ϕ a una funzione $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$?

10. Sia G un gruppo abeliano, e sia ϕ la mappa che manda ogni x in x^2.
    a) Dimostrare che ϕ è un omomorfismo di gruppi.
    b) Dare un esempio in cui ϕ è biunivoca.
    c) Dare un esempio in cui ϕ è iniettiva ma non suriettiva.
    d) È possibile che ϕ sia suriettiva ma non iniettiva?
    e) Cosa succede se G non è abeliano?

11. Sia $\mathcal{C}([0,1])$ l'insieme delle funzioni continue sull'intervallo $[0,1]$.
    a) Dimostrare che $\mathcal{C}([0,1])$ è un gruppo rispetto all'addizione di funzioni.
    b) Dimostrare che la mappa
    $$\begin{aligned} \int\colon \mathcal{C}([0,1]) &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ f &\longmapsto \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$
    è un omomorfismo suriettivo di $\mathcal{C}([0,1])$ in $(\mathbb{R}, +)$.
    c) Determinare il nucleo di $\int$.

12. Dimostrare che un gruppo senza sottogruppi non banali è ciclico. Vale il viceversa?

13. Dimostrare che non esistono elementi di ordine 13 in S_{12}. Esistono elementi di ordine 14 in S_{13}?

14. Trovare tutti gli elementi di ordine 6 in S_6.

15. Dimostrare che, se tutti gli elementi di G hanno ordine ≤ 2, allora G è abeliano. Dimostrare che la stessa cosa non vale se tutti gli elementi hanno ordine ≤ 3.