**UniversitÃ  degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Esercitazioni di AL210

**A.A. 2019–2020 - Docente: Prof. F. Tartarone**

**Esercitatore: Dario Spirito**

Esercitazione 3
11 ottobre 2019

1. Dati due sottogruppi $H, K$ di un gruppo $G$, sia $HK := \{hk \mid h \in H, k \in K\}$.
   a) Dimostrare che $HK$ è un sottogruppo se e solo se $HK = KH$.
   b) Dare un esempio esplicito in cui $HK$ non è un sottogruppo.
   c) Dimostrare che, se $H$ è normale in $G$, $HK$ è un sottogruppo; dare un esempio in cui $HK$ non è normale.
   d) Dimostrare che, se $H$ e $K$ sono normali in $G$, allora $HK$ è normale in $G$.

2. Siano $(G, *)$ e $(H, \star)$ due gruppi. Nell'insieme $G \times H$ consideriamo l'operazione $\cdot$ definita da
$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) := (g_1 * g_2, h_1 \star h_2).$$
   a) Dimostrare che $G \times H$ con questa operazione è un gruppo (è detto il *prodotto diretto* di $G$ ed $H$).
   b) Dimostrare che $G' := G \times \{e_H\}$ e $H' := \{e_G\} \times H$ sono sottogruppi normali di $G \times H$, isomorfi rispettivamente a $G$ e $H$.
   c) Dimostrare che $G' \cap H' = \{(e_G, e_H)\}$.
   d) Dimostrare che, se $g \in G'$ e $h \in H'$, allora $gh = hg$.
   e) Dimostrare che $G \times H$ e $H \times G$ sono isomorfi.
   f) Dimostrare che $G \times H$ è abeliano se e solo se $G$ ed $H$ sono abeliani.

3. Sia $G$ un gruppo, e siano $H$ e $K$ due sottogruppi normali di $G$ tali che $H \cap K = \{e\}$ e $HK = G$. Dimostrare che $G \simeq H \times K$.

4. Siano $a, b$ interi coprimi. Dimostrare che $\mathbb{Z}_{ab} \simeq \mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$. Cosa succede se $a$ e $b$ hanno un fattore in comune?

5. Dimostrare che $D_6 \simeq D_3 \times \mathbb{Z}_2$.

6. Dimostrare che $D_4$ e $A_4$ non possono essere scritti come prodotto diretto non banale.

7. Dimostrare che la mappa
$$\begin{aligned} \exp\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto e^x \end{aligned}$$
è un isomorfismo tra $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{R}^+, \cdot)$. Dedurne che $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ è isomorfo al prodotto diretto di $(\mathbb{R}, +)$ e $\mathbb{Z}_2$.

8. Trovare tutti i sottogruppi di $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ e $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

9. Sia $Q$ il gruppo dei quaternioni.
   a) Verificare che $N := \{\pm 1\}$ è un sottogruppo normale.
   b) Descrivere esplicitamente il gruppo quoziente $Q/N$ e dimostrare che è isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
   c) Esibire un omomorfismo $\phi : Q \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ con nucleo $N$.
   d) Scrivere esplicitamente l'isomorfismo $\overline{\phi} : Q/N \longrightarrow \mathrm{im}\phi$.
   e) Esplicitare la corrispondenza tra i sottogruppi di $Q$ contenenti $N$ e i sottogruppi di $\mathrm{im}\phi$.

10. Sia $G$ un gruppo finito. Dimostrare che, se tutti gli elementi di $G$ hanno ordine 2, allora $|G| = 2^n$ per qualche intero $n$.

11. Sia $n$ un multiplo di 6. Esibire un gruppo non abeliano di ordine $n$.

12. Descrivere esplicitamente $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $S_3$, $D_4$, $D_5$ e $Q$ come gruppi di permutazioni.

13. Descrivere esplicitamente $S_3$, $D_4$ e $D_5$ come gruppi di permutazioni attraverso il metodo del teorema di Cayley.

14. Sia $G$ un gruppo finito di cardinalità $n$, e sia $\gamma : G \longrightarrow S(G)$ la mappa definita dalla dimostrazione del teorema di Cayley.
   a) Dimostrare che, per ogni $g \in G$, $\gamma(g)$ non ha punti fissi.
   b) Identificando $S(G)$ con $S_n$, dimostrare che $\gamma(g)$ è prodotto di cicli disgiunti di cardinalità $\mathrm{ord}(g)$.
   c) Dedurne che l'ordine di $g$ divide $n$.

15. Per ogni sottogruppo normale $N$ di $D_4$, determinare a cosa è isomorfo il quoziente $D_4/N$.

16. Determinare (a meno di isomorfismo) tutti i gruppi di ordine 4 e di ordine 6.