Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL210

A.A. 2019–2020 - Docente: Prof. F. Tartarone

Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 4
18 ottobre 2019

1. Trovare tutti gli omomorfismi di gruppi da D_4 a $\mathbb{Z}_4$ e da $\mathbb{Z}_4$ a D_4; per i primi, esplicitare nucleo e immagine e scrivere esplicitamente l'isomorfismo canonico $D_4/\ker\phi \longrightarrow \mathrm{im}\phi$.

2. Determinare, per ogni n, il centro di D_n e di S_n.

3. Sia g un elemento di ordine 2. Dimostrare che $\langle g\rangle$ è normale se e solo se $g \in Z(G)$. Dare un esempio di un g di ordine 3 in cui questa equivalenza non vale.

4. Sia p un numero primo. Determinare il numero di sottogruppi di $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

5. Sia G un gruppo. Siano H e K due suoi sottogruppi tali che:
   - $HK = G$;
   - K è normale in G;
   - $H \cap K = \{e\}$.

   Dimostrare che G è isomorfo al prodotto semidiretto di H e K.

6. Dimostrare che D_n è prodotto semidiretto di $\mathbb{Z}_n$ e $\mathbb{Z}_2$.

7. Per n primo, determinare tutti i possibili prodotti semidiretti $\mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$. Dimostrare che esistono tre prodotti semidiretti $\mathbb{Z}_8 \rtimes \mathbb{Z}_2$ non isomorfi tra loro.

8. Dimostrare che il gruppo dei quaternioni non può essere scritto come prodotto semidiretto non banale.

9. Determinare quali delle seguenti applicazioni $G \times X \longrightarrow X$, $(g,x) \mapsto g * x$, sono azioni, e in particolare quali sono fedeli e quali sono transitive.
   a) $G = X, \quad g * x := gx$
   b) $G = X, \quad g * x := g^{-1}x$
   c) $G = X = D_5, \quad g * x := \sigma g x$
   d) $G = (\mathbb{R}, +), \quad X = \mathbb{R}, \quad g * x := g + x + 2$
   e) $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot), \quad X = \mathbb{R}, \quad g * x := gx$
   f) $G = (\mathbb{R}, +), \quad X = \mathbb{R}, \quad g * x := gx$
   g) $G = (\mathbb{R}, +), \quad X = \mathbb{R}^2, \quad r * (x,y) = (x + ry, y)$.

10. Sia G un gruppo, e siano $\tau_1 : G \times X \longrightarrow X$ e $\tau_2 : G \times Y \longrightarrow Y$ due azioni. Dimostrare che la mappa

$$\tau\colon G \times (X \times Y) \longrightarrow X \times Y,$$
$$(g,(x,y)) \longmapsto (\tau_1(g,x), \tau_2(g,y))$$

è un'azione di G su $X \times Y$. Dimostrare inoltre che $\mathrm{St}_{(x,y)} = \mathrm{St}_x \cap \mathrm{St}_y$ e che $\mathcal{O}(x,y) \subseteq \mathcal{O}(x) \times \mathcal{O}(y)$.

11. Sia $X(n,k)$ l'insieme dei sottogruppi di $\{1,\dots,n\}$ di cardinalità k, con $k \leq n$. Dimostrare che mappa

$$\begin{aligned} S_n \times X(n,k) &\longrightarrow X(n,k) \\ (\sigma, \{a_1,\dots,a_n\}) &\longmapsto \{\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)\} \end{aligned}$$

è un'azione e descrivere esplicitamente l'azione di (12) e di (123) su $X(4,2)$.

12. Sia $\sigma := (145)(23) \in S_6$. Sia τ l'azione naturale di $\langle\sigma\rangle$ su $X := \{1,2,3,4,5,6\}$. Determinare orbita e stabilizzatore di ogni elemento di X secondo τ.

13. Sia $G := \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a,b,d \in \mathbb{Z}_5, \det(M) = 1 \right\}$.
    a) Dimostrare che G è un gruppo.
    b) Dimostrare che G agisce in modo naturale su $(\mathbb{Z}_5)^2$.
    c) Determinare il numero di orbite di quest'azione.
    d) Cosa succede se si sostituisce $\mathbb{Z}_5$ con un altro $\mathbb{Z}_p$ (p primo)?

14. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n < \infty$ su un campo K, e sia $\mathrm{GL}_n(K)$ l'insieme delle matrici invertibili di ordine n su K.
    a) Dimostrare che la seguente mappa è un'azione:

    $$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(K) \times V &\longrightarrow V \\ (A, \mathbf{v}) &\longmapsto A\mathbf{v}. \end{aligned}$$

    b) Dimostrare che esistono esattamente due orbite.
    c) Descrivere lo stabilizzatore di un vettore $\mathbf{v}$.
    d) Determinare una matrice che non appartiene a $\mathrm{St}_{\mathbf{v}}$ per ogni $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.
    e) Dimostrare che la mappa

    $$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(K) \times (V \times V) &\longrightarrow V \times V \\ (A, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &\longmapsto (A\mathbf{v}, A\mathbf{w}) \end{aligned}$$

    è un'azione, e determinarne le orbite.

15. Sia G il gruppo delle isometrie del piano reale; sia X_2 l'insieme delle coppie di punti del piano e sia X_3 l'insieme delle terne di punti.
    a) Dimostrare che G agisce in modo naturale su X_2 e X_3.
    b) Determinare l'orbita e lo stabilizzatore di ogni elemento di X_2.
    c) Dimostrare che esiste una funzione biunivoca naturale $X_2/G \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.
    d) Caratterizzare quando due elementi di X_3 sono nella stessa orbita.

16. Sia G un gruppo di ordine 8.
    a) Dimostrare che esiste un elemento di G di ordine 2.
    b) Dimostrare che, se G non è abeliano, esiste un elemento di ordine 4.
    c) Dimostrare che il numero n_4 degli elementi di G di ordine 4 è pari.
    d) Supponiamo $n_4 = 6$, e siano α, β due elementi di ordine 4 che generano sottogruppi distinti. Dimostrare che $(\alpha\beta)^{-1} = \beta\alpha$, e dedurne che G è isomorfo al gruppo dei quaternioni.
    e) Dimostrare che, se $0 < n_4 < 6$ e G non è ciclico, allora G è isomorfo ad un prodotto semidiretto di $\mathbb{Z}_4$ e $\mathbb{Z}_2$.
    f) Mostrare che G è isomorfo a uno tra $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, D_4 e Q, e che questi sono a due a due non isomorfi.