Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL210

A.A. 2019–2020 - Docente: Prof. F. Tartarone

Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 6
8 novembre 2019

I esonero, A.A. 2017-2018

1. Sia G un gruppo commutativo e si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned}\varphi\colon G\times G &\longrightarrow G,\\ (x,y)&\longmapsto xy^{-1}\end{aligned}$$

   a) Verificare che φ è un omomorfismo di gruppi.
   b) Calcolare il nucleo e l'immagine di φ.
   c) Definire l'isomorfismo canonico

$$\overline{\varphi}\colon \frac{G}{Ker(\varphi)} \longrightarrow \mathrm{Im}(\varphi)$$

   d) Determinare la controimmagine $\varphi^{-1}(g)$ del generico elemento $g\in G$.

2. Sia $G=\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{13})$ il gruppo delle unità di $\mathbb{Z}_{13}$.
   a) Dimostrare che G è ciclico e determinare i suoi generatori.
   b) Determinare il gruppo $Aut(G)$ degli automorfismi di G e stabilire se $Aut(G)$ è ciclico.

3. Siano $\alpha := (123)(156)(7624)(92)$, $\beta := (14)(15)(63)(239)(145672)(478)\in S_9$.
   a) Dimostrare che esiste una permutazione $\tau\in S_9$ tale che $\beta=\tau\alpha\tau^{-1}$.
   b) Determinare espressamente un tale elemento τ.

4. Sia $G := GL_2(\mathbb{R})$ il gruppo delle matrici quadrate invertibili di ordine 2 a coefficienti reali e sia $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\in G$. Determinare il centralizzante di A in G e stabilire se esso è un sottogruppo normale di G.

5. Dimostrare che S_4 non può essere scritto come prodotto diretto di due suoi sottogruppi non banali.

6. Determinare tutti gli omomorfismi *non* suriettivi da S_3 in sé. Trovare anche un omomorfismo suriettivo.

Altri esercizi

1. Determinare i sottogruppi di Sylow dei seguenti gruppi: $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_5$, D_4, S_3, A_4, D_5, $D_4 \times \mathbb{Z}_3$, $A_4 \times \mathbb{Z}_3$.

2. Dato un gruppo finito G, sia $\eta(G)$ il minimo intero n tale che G è isomorfo ad un sottogruppo di S_n.
   a) Dimostrare che $\eta(G) \leq |G|$.
   b) Dimostrare che $\eta(\mathbb{Z}_n) = n$ se e solo se n è potenza di un numero primo.
   c) Dimostrare che, se p è un p-gruppo, allora $p|\eta(G)$.
   d) Determinare $\eta(D_p)$, dove p è un numero primo.
   e) Determinare $\eta(S_n)$ e $\eta(A_n)$.
   f) Dimostrare che $\eta(Q) = 8$. (Suggerimento: considerare i 2-Sylow di S_6.)

3. Determinare il numero di sottogruppi di Sylow di S_4 e di S_5 e la loro classe di isomorfismo.

4. Sia $G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_5, ac \neq 0 \right\}$.
   a) Dimostrare che G è un gruppo e determinarne l'ordine.
   b) Determinare il centro di G.
   c) Per ogni primo p che divide $|G|$, determinare almeno un elemento di ordine p e un p-sottogruppo di Sylow.
   d) Calcolare il numero di p-sottogruppi di Sylow di G.

5. Sia G un gruppo e p il più piccolo numero primo che divide $|G|$. Sia H un sottogruppo di indice p. Dimostrare che H è normale.

6. Un gruppo è *semplice* se non contiene sottogruppi normali non banali.
   a) Determinare se $\mathbb{Z}_n$ e S_n sono semplici (in funzione di n).
   b) Dimostrare che l'unico p-gruppo finito semplice è $\mathbb{Z}_p$.
   c) Dimostrare che, se G è un gruppo semplice, allora tutti i sottogruppi $H \neq \{e\}$ hanno indice ≥ 5.
   d) Dimostrare che un gruppo di ordine pq (p, q primi distinti) non è semplice.
   e) Dimostrare che non esistono gruppi semplici di ordine 12, 30, 55, 56, 80 o 1001.