Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL210

A.A. 2019–2020 - Docente: Prof. F. Tartarone
Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 7
22 novembre 2019

1. Sia d un intero positivo che non è un quadrato perfetto.
   a) Dimostrare che $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] := \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ è un sottoanello di $\mathbb{C}$.
   b) Dimostrare che $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] := \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ è un sottocampo di $\mathbb{C}$.

   Che succede se d è un quadrato perfetto?

2. Sia $A := M_2(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici di ordine 2 a valori reali, dotato dell'addizione termine a termine e del prodotto righe per colonne.
   a) Dimostrare che A è un anello unitario ma non commutativo.
   b) Dimostrare che $R := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ è un sottoanello non unitario di A.
   c) Dimostrare che R è un ideale destro ma non sinistro di A.
   d) Prendendo R a modello, trovare un sottoinsieme L di A che è un sottoanello non unitario e un ideale sinistro ma non destro di A.

3. Sia $A := M_2(\mathbb{R})$ come sopra, e sia I un ideale bilatero di A diverso da (0) e da A.
   a) Dimostrare che I non contiene alcuna matrice invertibile.
   b) Dimostrare che I è chiuso rispetto al coniugio (fatto con matrici invertibili).
   c) Dimostrare che I contiene un elemento di R (vedi esercizio precedente) diverso dalla matrice nulla.
   d) Dimostrare che gli unici ideali bilateri di A sono quelli banali.

4. In ognuno dei seguenti casi, determinare quando B è un sottoanello e/o un ideale dell'anello A:
   a) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Q}$
   b) $A = M_n(\mathbb{R})$, $B = \{M \in A \mid \det(M) = 0\}$
   c) $A = \{\text{funzioni } \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$, $B = \{\text{funzioni continue}\}$
   d) $A = \{\text{funzioni continue } \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$, $B = \{f \in A \mid f(1) = 0\}$
   e) $A = \{\text{funzioni } \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}\}$, $B = \{f \in A \mid f \equiv 0 \text{ o ha un numero finito di zeri}\}$
   f) $A = \mathbb{Z}[X, Y, Z]$, $B = \{f \in \mathbb{Z}[X, Y, Z] \mid X \text{ divide } f\}$
   g) $A = \mathbb{Q}$, $B = \{\frac{x}{2^n} \mid x \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

5. Sia A un anello e siano I, J ideali (entrambi destri o entrambi sinistri) di A. Dimostrare che i seguenti insiemi sono ideali di A:
   a) $I \cap J$;

b) $I + J := \{i + j \mid i \in I, j \in J\}$;

c) $IJ := \{\sum i_1 j_1 + \cdots + i_n j_n \mid i_t \in I, j_t \in J\}$.

Dimostrare anche che $IJ \subseteq I \cap J$.

6. Determinare un anello A e due ideali I e J tali che l'insieme $L := \{ij \mid i \in I, j \in J\}$ non è un ideale di A. Qual è l'ideale generato da L?

7. Sia $\mathbb{H} := \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, dove i, j e k si comportano come nel gruppo dei quaternioni (ovvero $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k = -ji$ eccetera).

   a) Dimostrare che $\mathbb{H}$ è un anello unitario.

   b) Dimostrare che $\mathbb{R} := \{a + 0i + 0j + 0k \mid a \in \mathbb{R}\}$ è il centro di $\mathbb{H}$.

   Per ogni $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ sia $\overline{q} := a - bi - cj - dk$ il *coniugato* di q, e sia $||q|| := \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ la sua *norma*.

   c) Verificare che per ogni $q, q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ si hanno le seguenti uguaglianze:

   - $\overline{\overline{q}} = q$;
   - $||q|| = 0$ se e solo se $q = 0$;
   - $\overline{q_1 + q_2} = \overline{q_1} + \overline{q_2}$;
   - $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2 q_1}$;
   - $q\overline{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$;
   - $||q_1|| \cdot ||q_2|| = ||q_1 q_2||$.

   d) Dimostrare che $\overline{q}/||q||$ è l'inverso di $q \neq 0$, e dedurne che $\mathbb{H}$ è un corpo.

   e) Determinare tutti gli zeri in $\mathbb{H}$ del polinomio $X^2 + 1$.

   f) Dimostrare che l'insieme dei quaternioni di norma 1 è un sottogruppo di $\mathbb{H}^* := \mathbb{H} \setminus \{0\}$ rispetto al prodotto, e che contiene tutti gli elementi di ordine finito di $\mathbb{H}^*$.

8. Sia G un gruppo e A un anello. Definiamo $A[G]$ come l'insieme delle somme formali finite $\sum_{g \in G} a_g g$, con $a_g \in A$. Definiamo $+$ e $\cdot$ in questo modo:

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) + \left(\sum_{g \in G} b_g g\right) = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g$$

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) \cdot \left(\sum_{g \in G} b_g g\right) = \sum_{g \in G} \left(\sum_{h_1 h_2 = g} a_{h_1} b_{h_2}\right) g.$$

   a) Dimostrare che $A[G]$ è un anello.

   b) Dimostrare che $A[G]$ è unitario se e solo se lo è A.

   c) Dimostrare che $A[G]$ è commutativo se e solo se lo sono sia A che G.

   d) Dimostrare che, se $g \in G$ ha ordine finito, allora $1 + g$ e $1 - g$ sono divisori dello zero.

   e) Sia Q il gruppo dei quaternioni. $\mathbb{R}[Q]$ coincide con $\mathbb{H}$?