Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL210

A.A. 2019–2020 - Docente: Prof. F. Tartarone

Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 8
29 novembre 2019

1. Determinare se i seguenti ideali sono primi e/o massimali:

   (a) $10\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$

   (b) $4\mathbb{Z}$ in $2\mathbb{Z}$

   (c) $2\mathbb{Z} \times 5\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

   (d) $13\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

   (e) (X, Y) in $\mathbb{Q}[X, Y, Z]$

   (f) $5\mathbb{Z}[X]$ in $\mathbb{Z}[X]$

   (g) $(5, X)\mathbb{Z}[X]$ in $\mathbb{Z}[X]$

   (h) $(X, X + 1)$ in $\mathbb{Q}[X]$

   (i) $(X^2 - 1)$ in $\mathbb{Q}[X]$

   (j) $(X^2 - 5)$ in $\mathbb{Q}[X]$

   (k) $(X^2 - 5)$ in $\mathbb{C}[X]$

   (l) $(X^3 + 2X + 1)$ in $\mathbb{Z}_7[X]$

   (m) $3\mathbb{Z}_{(3)}$ in $\mathbb{Z}_{(3)} := \{a/b \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Z}, 3 \text{ non divide } b\}$

   (n) $\{f \in A \mid f(1) = 0\}$ in $A := \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ è continua}\}$

   (o) $\{f \in A \mid f(1) = f(2) = 0\}$ in A

   (p) $(\overline{X}, \overline{Y})$ in $\mathbb{Z}[X, Y]/(X^2, XY, Y^3)$

   Nei casi (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g), (n), (o), (p), determinare anche il quoziente tra l'anello e l'ideale.

2. Sia $A := M_2(\mathbb{Z})$ l'anello delle matrici di ordine 2 a valori interi.

   a) Dimostrare che la mappa

   $$\begin{aligned} \phi\colon A &\longrightarrow M_2(\mathbb{Z}_p), \\ M &\longmapsto M \bmod p \end{aligned}$$

   (dove $M \bmod p$ è la matrice che si ottiene riducendo tutti i coefficienti modulo p) è un omomorfismo suriettivo di anelli.

   b) Determinare $\ker \phi$ e stabilire se è un ideale primo e/o massimale di A.

3. Sia $A := \mathbb{Q}[X, Y]$, e sia $I := \{f \in \mathbb{Q}[X, Y] \mid f \text{ non ha termine noto}\}$.

   a) Dimostrare che I è un ideale di A.

   b) Determinare un omomorfismo di nucleo I.

   c) Determinare se I è primo e/o massimale.

   d) Dimostrare che $\{X, Y\}$ è un insieme di generatori di I.

   e) Dimostrare che I non è un ideale principale.

4. Sia $(G, +)$ un gruppo abeliano, e sia $A := \mathrm{End}(G)$ l'insieme degli omomorfismi da A in sé.

a) Dimostrare che A è un anello rispetto alle operazioni

$$(\phi + \psi)(g) := \phi(g) + \psi(g)$$

$$(\phi \cdot \psi)(g) := (\phi \circ \psi)(g).$$

b) Dimostrare che $\mathrm{End}(\mathbb{Z}_n) \simeq \mathbb{Z}_n$ per ogni numero intero n.

c) Dare un esempio in cui A non è un anello commutativo.

d) Dimostrare che, se G non è abeliano, allora la somma $\phi + \psi$ può non essere un omomorfismo.

5. Determinare tutti gli ideali di $\mathbb{Z}$ e stabilire quali sono primi e quali sono massimali. Per ogni coppia di ideali I e J, determinare inoltre $I + J$ e $I \cap J$.

6. Determinare gli ideali primi e massimali di $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_{36}$, $\mathbb{Z}_{38}$, $\mathbb{Z}_{42}$ e $\mathbb{Z}_{60}$.

7. Sia A un anello e sia I un ideale. Il *radicale* di I è l'insieme $\mathrm{rad}(I) := \{a \in A \mid a^n \in I \text{ per un } n \in \mathbb{N}\}$.

   a) Dimostrare che $\mathrm{rad}(\mathrm{rad}(I)) = \mathrm{rad}(I)$.

   b) Dimostrare che, se A è commutativo, allora $\mathrm{rad}(I)$ è un ideale.

   c) Dare un esempio di un anello non commutativo in cui $\mathrm{rad}((0))$ non è un ideale.

   d) Dimostrare che, se P è un ideale primo, allora $\mathrm{rad}(P) = P$.

   e) Dimostrare che, se P, Q sono ideali primi con $P \nsubseteq Q$ e $Q \nsubseteq P$, allora $P \cap Q$ non è un ideale primo ma $\mathrm{rad}(P \cap Q) = P \cap Q$.

8. Consideriamo l'anello $\mathbb{Z}[X]$.

   a) Dimostrare che l'ideale I dei polinomi con tutti i coefficienti multipli di 5 è un ideale principale di $\mathbb{Z}[X]$.

   b) Dimostrare che I è un ideale primo, ma non massimale.

   c) Sia J l'ideale dei polinomi il cui termine noto è un multiplo di 5: dimostrare che J è un ideale massimale e determinare il quoziente $\mathbb{Z}[X]/J$.

9. Sia A il prodotto diretto degli anelli $\mathbb{Z}_p$, per p che varia tra i numeri primi.

   a) Determinare se A è un anello unitario.

   b) Determinare se A è integro.

   c) Determinare la caratteristica di A.

   d) Determinare un ideale primo di A.

   e) Determinare se è possibile trovare un omomorfismo unitario iniettivo $\mathbb{Z} \longrightarrow A$, e in caso affermativo esplicitarlo.