Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL210

A.A. 2019–2020 - Docente: Prof. F. Tartarone

Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 9
5 dicembre 2019

1. Consideriamo l'anello $\mathbb{Z}[X]$.
   a) Descrivere l'ideale generato da 3.
   b) Dimostrare che l'ideale generato dal polinomio $X^2 + 1$ è primo.
   c) Dimostrare che l'ideale generato da 3 e $X^2 + 1$ è un ideale massimale che contiene propriamente (3) e $(X^2 + 1)$.
   d) Dimostrare che l'ideale generato da 3 e $X^2 + 2$ contiene propriamente (3) e $(X^2 + 2)$, ma non è un ideale primo.
   e) Determinare tutti gli ideali massimali contenenti $(3, X^2 + 2)$.
   f) Sia p un numero primo e $f(X)$ un polinomio monico. Dimostrare che $(p, f(X))$ è un ideale massimale se e solo se $\overline{f}(X)$ è un polinomio irriducibile di $\mathbb{Z}_p[X]$.

2. Determinare un generatore dei seguenti ideali di $\mathbb{Z}$:

   a) $(14, 20)$
   b) $(84, 90)$
   c) $(75, 99)$
   d) $(12, 13, 14)$
   e) $(30, 350, 385)$
   f) $(99, 1269, 48)$

3. Determinare i seguenti quozienti:

   a) $\mathbb{Z}_6/\overline{2}\mathbb{Z}_6$
   b) $\mathbb{Z}_{12}/\overline{4}\mathbb{Z}_{12}$
   c) $\mathbb{Z}_{21}/\overline{6}\mathbb{Z}_{21}$
   d) $\mathbb{Z}_{18}/\overline{6}\mathbb{Z}_{18}$
   e) $\mathbb{Z}_{29}/\overline{3}\mathbb{Z}_{29}$
   f) $\mathbb{Z}_{ab}/\overline{a}\mathbb{Z}_{ab}$

4. Sia $A := \left\{ \frac{a}{2^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$.
   a) Dimostrare che A è un anello.
   b) Trovare gli elementi invertibili di A e dimostrare che A non è un campo.
   c) Dimostrare che il campo dei quozienti di A è $\mathbb{Q}$.

5. Sia A il prodotto diretto degli anelli $\mathbb{Z}_p$, per p che varia tra i numeri primi.
   a) Determinare se A è un anello unitario.
   b) Determinare se A è integro.
   c) Determinare la caratteristica di A.
   d) Determinare un ideale primo di A.
   e) Determinare se è possibile trovare un omomorfismo unitario iniettivo $\mathbb{Z} \longrightarrow A$, e in caso affermativo esplicitarlo.

f) Determinare se è possibile trovare un omomorfismo unitario suriettivo $A \longrightarrow \mathbb{Z}$. (Difficile!)[1]

6. Sia $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri primi e sia B l'insieme

$$B := \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}_p := \{(a_p)_{p \in \mathbb{P}} \mid a_p \in \mathbb{Z}_p,\ a_p \neq 0 \text{ solo per un numero finito di } p\}.$$

   a) Dimostrare che B, con addizione e prodotto termine a termine, è un anello.
   b) Determinare se B è un unitario.
   c) Determinare la caratteristica di B.
   d) Descrivere un omomorfismo $\mathbb{Z} \longrightarrow B$.
   e) Determinare se è possibile trovare un omomorfismo iniettivo $\mathbb{Z} \longrightarrow B$, e in caso affermativo esplicitarlo.
   f) Determinare se è possibile trovare un omomorfismo non nullo $B \longrightarrow \mathbb{Z}$, e in caso affermativo esplicitarlo.
   g) Determinare se A e B sono isomorfi.

7. Un elemento a di un anello A è *idempotente* se $a^2 = a$, e un anello è *booleano* se ogni elemento è idempotente.
   a) Dimostrare che, se a è idempotente e A è un anello unitario, allora $1 - a$ è idempotente.
   b) Dimostrare che, se a è idempotente, allora $A \simeq aA \times (1 - a)A$.

   Sia A un anello booleano.
   c) Dimostrare che la caratteristica di A è 2.
   d) Dimostrare che A è commutativo.
   e) Dare un esempio di anello booleano diverso da $\mathbb{Z}_2$.

8. Sia A un anello unitario, e siano I_1, I_2 due ideali di A.
   a) Dimostrare che la mappa naturale $\theta : A \longrightarrow A/I_1 \times A/I_2$ è un isomorfismo.
   b) Determinare $\ker \theta$.
   c) Dimostrare che, se $I_1 + I_2 = A$, allora θ è suriettivo.
   d) Dedurne che $A/(I_1 \cap I_2) \simeq A/I_1 \times A/I_2$.

9. Sia A un anello commutativo di caratteristica p.
   a) Dimostrare che l'applicazione

$$\begin{aligned} F \colon A &\longrightarrow A, \\ a &\longmapsto a^p \end{aligned}$$

   è un omomorfismo di anelli.
   b) Dimostrare che, se A è un dominio d'integrità, allora F è iniettiva.
   c) Dare un esempio in cui A è iniettiva ma non suriettiva.

[1] Molto difficile!