Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL310

A.A. 2015–2016 - Docente: Prof. S. Gabelli

Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 3
27 ottobre 2015

1. Per ogni n, sia ξ_n una radice n-esima primitiva dell'unità. Dimostrare che:

    a) $\xi_{nd}^d = \xi_n$

    b) se n è dispari, $\mathbb{Q}(\xi_n) = \mathbb{Q}(\xi_{2n})$

    c) $\mathbb{Q}(\xi_n, \xi_m) = \mathbb{Q}(\xi_{\mathrm{mcm}(n,m)})$

2. Dimostrare che, se $n = 2^k$ per un intero k, allora l'n-esimo polinomio ciclotomico è $X^{n/2} + 1$.

3. Determinare tutti i $\mathbb{Q}$-isomorfismi in $\mathbb{C}$ dei seguenti campi, e specificare quali sono automorfismi:

    a) $\mathbb{Q}(\sqrt{15})$

    b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

    c) $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

    d) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

    e) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$

    f) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$

    g) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\xi_3)$

    h) $\mathbb{Q}(\xi_7)$

    i) $\mathbb{Q}(\xi_9)$

    j) $\mathbb{Q}(\xi_9 + \xi_9^{-1})$

    k) $\mathbb{Q}(\xi_{15})$

    l) $\mathbb{Q}(\xi_{13} + \xi_{13}^3 + \xi_{13}^9)$

4. Determinare tutti gli automorfismi del campo di spezzamento i $\mathbb{C}$ dei seguenti polinomi:

    a) $X^2 + X + 1$

    b) $X^3 - 7$

    c) $X^4 - X^3 + 3X^2 + 3$

    d) $X^4 + 4X^2 + 1$

    e) $X^3 - 4X + 1$

    f) $X^3 + 3X^2 + 3X + 2$

    g) $X^3 + 10X + 5$

    h) $(X^2 - 2)(X^3 - 7)$

    i) $(X^2 + 1)(X^4 - 3)$

    j) $X^4 + 7X^2 + 4$

    k) $X^5 + 3X^4 + 4X^3 + 2X^2 + 3X - 1$

    l) $X^6 - 3X^5 + 3X^4 + 3X^2 - 3X - 1$

5. Sia $f(X) = X^4 - 3X^2 + 3 \in \mathbb{Q}[X]$. Determinare il campo di spezzamento K in $\mathbb{C}$ di f e tutti gli automorfismi di K. Per ogni radice α di f, determinare poi quali automorfismi hanno α come punto fisso.

6. Sia $f(X) = X^3 + 3X + 6 \in \mathbb{Q}[X]$, e sia α una radice di f in $\mathbb{C}$. Determinare $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ e se $\mathbb{Q}(\alpha)$ è normale su $\mathbb{Q}$.

7. Determinare i K-isomorfismi in $\mathbb{C}$ di $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$, per $K = \mathbb{Q}, \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{5})$.

8. Dimostrare che tutti i $\mathbb{Q}$-isomorfismi di $\mathbb{Q}(\xi_n)$ in $\mathbb{C}$ sono automorfismi; dimostrare che formano un gruppo e determinarlo.

9. Sia $f(X)$ un polinomio irriducibile su $\mathbb{Q}$, e sia α una sua radice. Determinare condizioni su f perché esista un isomorfismo ϕ di $\mathbb{Q}(\alpha)$ in $\mathbb{C}$ tale che $\phi(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$.

10. Determinare il polinomio minimo di $\xi_5 + \xi_5^{-1}$ e dimostrare che $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subseteq \mathbb{Q}(\xi_5)$. È vero che $\mathbb{Q}(\sqrt{n}) \subseteq \mathbb{Q}(\xi_n)$ per ogni n?

11. Sia $E \subset \mathbb{C}$ un campo: dimostrare che la restrizione ad E del coniugio complesso χ è un $\mathbb{Q}$-isomorfismo di E in $\chi(E)$, e che se E è un campo di spezzamento di un polinomio a coefficienti razionali allora $\chi|_E$ è un automorfismo di E. Qual è il campo F più grande contenuto in E tale che $\chi|_E$ è un F-omomorfismo?

12. Sia $f(X) = X^7 - 5X^5 + 5X^4 - 20X^3 - 15X + 5$. Determinare se esiste una radice β di $f(X)$ tale che l'elemento $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}}$ appartiene a $\mathbb{Q}(\beta)$.

13. Sia $f(X) := X^5 + \frac{\sqrt[3]{2}}{7} X^2 + 11\sqrt[3]{4}X - \sqrt{7} \in \mathbb{R}[X]$.
    a) Dimostrare che ogni radice α di f ha grado al più 30 su $\mathbb{Q}$.
    b) Determinare se $\beta := f(\log 2)$ è algebrico o trascendente su $\mathbb{Q}$.

14. Sia $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio irriducibile, e sia K un suo campo di spezzamento.
    a) Dimostrare che, se $\deg f = [K : \mathbb{Q}] = 3$, allora $K \subseteq \mathbb{R}$.
    b) Determinare gli n per cui $\deg f = [K : \mathbb{Q}] = n$ implica $K \subseteq \mathbb{R}$.
    c) Trovare un esempio esplicito in cui $\deg f = [K : \mathbb{Q}] = n$ ma $K \not\subseteq \mathbb{R}$.

15. Verificare che l'isomorfismo di campi $\psi : \mathbb{Q}(\pi) \longrightarrow \mathbb{C}$ definito da $\psi(\pi) := \pi^2$ è un endomorfismo di $\mathbb{Q}(\pi)$ ma non un automorfismo.

16. Per ognuno dei seguenti polinomi, determinare il campo di spezzamento su $\mathbb{F}_p$, per i p indicati a fianco:
    a) $X^3 + 2X + 1$, $p = 3, 5, 13$;
    b) $X^4 - X^3 - X + 1$, $p = 2, 3, 11$
    c) $X^4 - X^3 - X - 1$, $p = 3$
    d) $X^5 + 2X^4 + X^2 + 2X + 1$, $p = 3$