Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL310

A.A. 2015–2016 - Docente: Prof. S. Gabelli

Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 5
24 novembre 2015

1. Determinare un elemento primitivo dei seguenti ampliamenti:

   a) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$
   b) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\xi_3, \xi_5)$
   c) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{4}, \sqrt[5]{7})$
   d) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\xi_3 - \xi_7, \xi_7^2, \sqrt[19]{3}, i^2)$
   e) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}, \sqrt{5})$
   f) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \xi_8)$

2. Siano X, Y indeterminate indipendenti su $\mathbb{F}_p$, e sia K il campo di spezzamento su $\mathbb{F}_p(X, Y)$ del polinomio $(T^p - X)(T^p - Y)$. Dimostrare che l'ampliamento $\mathbb{F}_p(X, Y) \subseteq K$ non ammette alcun elemento primitivo.

3. Determinare se i seguenti ampliamenti sono normali:

   a) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2})$
   b) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$
   c) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$
   d) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\xi_7 - \xi_{12} + \sqrt[7]{2})$

4. a) Siano $\mathbb{Q}(\alpha), \mathbb{Q}(\beta)$ due estensioni semplici di $\mathbb{Q}$ tali che $\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}$, e supponiamo che $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\alpha)$ sia normale. Dimostrare che $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}][\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$.

   b) Siano F, L estensioni normali e finite di $\mathbb{Q}$. Dimostrare che esiste un isomorfismo tra $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(FK)$ e $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(F) \times \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(K)$.

5. Determinare il gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ dei seguenti polinomi:

   a) $X^2 - 5$
   b) $X^3 - 7$
   c) $X^3 - 3X + 3$
   d) $X^3 - 3X + 1$
   e) $X^3 + 3X^2 + 5X - 3$
   f) $X^3 + X^2 - 2X - 2$
   g) $(X^2 + 1)(X^5 - 1)$
   h) $X^4 + 4X^2 + 3$
   i) $(X^2 + 7)^5(X^5 - 1)$
   j) $(X^2 + 1)(X^4 + 1)$
   k) $X^4 + X^3 + 2X + 2$
   l) $X^4 - 4$
   m) $X^6 - 5X^4 + 4$

6. Sia $f(X) := X^4 + aX^2 + c \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio biquadratico irriducibile, e sia $t := a^2 - 4c$; sia G il suo gruppo di Galois. Dimostrare che:

a) $\sqrt{t} \notin \mathbb{Q}$;

b) $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ se e solo se $\sqrt{c} \in \mathbb{Q}$;

c) $G \simeq \mathbb{Z}_4$ se e solo se $\sqrt{tc} \in \mathbb{Q}$;

d) $G \simeq D_4$ negli altri casi.

7. Descrivere il gruppo di Galois di $X^6 - 2$ come gruppo di permutazioni.

8. Descrivere il gruppo di Galois di $(X^3 - 2)(X^5 - 2)$ come gruppo di permutazioni.

9. Sia p un numero primo. Dimostrare che, se $f \in \mathbb{Q}[X]$ è un polinomio irriducibile di grado p con esattamente due radici non reali, allora il gruppo di Galois di f è isomorfo a S_p.