Università degli Studi Roma Tre
AL110 Algebra 1, a.a. 2019/2020

Foglio di esercizi 1

1. Siano $X = \mathbb{R}$, $A = \{x{\in}\mathbb{R} \,|\, x^2 + x - 2 = 0\}$, $B = \{1, -1, 2\}$ e $C = \{1, \{2, 3\}\}$.

a. Determinare l'insieme delle parti di B e l'insieme delle parti di C.
b. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false:

$$1{\not\subseteq}A \quad 1{\in}C \quad \{1\}{\in}A \quad 2{\in}C \quad 1{\subseteq}A \quad 3{\in}C \quad 1{\in}A \quad \{1\}{\in}C \quad A{\subseteq}B \quad \{2, 3\}{\in}C \quad B{\subseteq}A \quad \{2\}{\in}C$$

2. Siano $X = \mathbb{N}$, $A = \{x{\in}\mathbb{N} \,|\, x < 20\}$ e $B = \{x{\in}\mathbb{N} \,|\, x \geq 10\}$. Calcolare

$$A \cup B \quad A \cap B \quad A \setminus B \quad B \setminus A \quad \mathcal{C}_X(A) \quad \mathcal{C}_X(B)$$

3. Siano $X = \mathbb{R}$, $A = \{x{\in}\mathbb{R} \,|\, x \leq 3\}$, $B = \{x{\in}\mathbb{R} \,|\, 5 \leq x \leq 21\}$. Determinare $\mathcal{C}_X(A \cup B), \mathcal{C}_X(A)$ e $\mathcal{C}_X(B)$. Verificare che $\mathcal{C}_X(A \cup B) = \mathcal{C}_X(A) \cap \mathcal{C}_X(B)$

4. Provare che le seguenti affermazioni sono false esibendo dei controesempi espliciti:

a. $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$.
b. $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$.
c. $A \setminus \mathcal{C}_X(B) = \mathcal{C}_X(\mathcal{C}_X(A) \setminus B)$

5. Siano $X = \mathbb{R}$, $A = \{x{\in}\mathbb{R} \,|\, x \leq a\}$, $B = \{x{\in}\mathbb{R} \,|\, b \leq x \leq c\}$. Dove a, b e c sono numeri reali qualsiasi, non necessariamente distinti. Determinare $\mathcal{C}_X(A \cup B)$ come unione di sottoinsiemi disgiunti di $\mathbb{R}$.

6. Per ogni $n{\in}\mathbb{N}$ sia $A_n = \{x{\in}N \,|\, x \neq n + 1\}$. Calcolare $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ e $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

7. Per ogni $n{\in}\mathbb{N}$ sia $B_n = \{x{\in}N \,|\, x \neq 2n\}$. Calcolare $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ e $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

8. Per ogni $n{\in}\mathbb{N}$ sia $C_n = \{x{\in}N \,|\, x \neq 2n + 3\}$. Calcolare $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ e $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

9. Per ogni $n{\in}\mathbb{N} \setminus \{0\}$ sia $I_n = (0, \frac{1}{n})$. Dimostrare che $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$. Determinare $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

10. Per ogni $n{\in}\mathbb{N} \setminus \{0\}$ sia $I_n = [0, \frac{1}{n}]$. Dimostrare che $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{0\}$. Determinare $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

11. Per ogni $n{\in}\mathbb{N} \setminus \{0\}$ sia $I_n = [-n, \frac{1}{2n}]$. Provare che non esistono due numeri naturali distinti n e m tali che $I_n \subseteq I_m$. Calcolare $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ e $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

12. Trovare esplicitamente (oppure provare che non esistono) degli intervalli chiusi $I_n = [a_n, b_n]$, tali che

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = (-1, 1).$$

13. Trovare esplicitamente (oppure provare che non esistono) degli intervalli aperti $I_n = (a_n, b_n)$, tali che

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = [-1, 1].$$

Dimostrare la seguente affermazione: $A \cap B$ se soltanto se $\mathcal{C}_X(A) \cup \mathcal{C}_X(B) = X$.

15. Determinare esplicitamente tre sottoinsiemi A, B e C di $\mathbb{N}$, tali che $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$, $A \cap B \cap C = \emptyset$, e $A \cup B \cup C = \mathbb{N}$.

16. Per ogni $r\in\{0,\,1,\,2\}$ sia
$$A_r = \{n\in\mathbb{N}\,|\,\text{la divisione di } n \text{ per 3 ha resto } r\}.$$
Dimostrare che $\{A_0,\,A_1,\,A_2\}$ è una partizione di $\mathbb{N}$. Generalizzare a un numero d qualsiasi.

17. Siano A e B sottoinsiemi di X. Dimostrare oppure confutare mediante controesempi le seguenti uguaglianze tra insiemi:
$$\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A\cap B) \qquad \mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A\cup B).$$

18. Sia X l'insieme di tutti i numeri naturali multipli di 3. Scrivere una partizione di X costituita da 2 sottoinsiemi. Scrivere una partizione di X costituita da infiniti sottoinsiemi.

19. È vero che $B\subset A$ se e soltanto se $\{B, A\setminus B, \mathcal{C}_X(A)\}$ è una partizione di X?

20. È vero che per ogni coppia di insiemi $A,\,B\subset X$, la famiglia $\{A\cap B,\,A\setminus B,\,B\setminus A,\,\mathcal{C}_X(A\cup B)\}$ è una partizione di X?

21. Per ogni $n\in\mathbb{Z}$ sia $A_n = [n+\sqrt{2},\,n+1+\sqrt{2}]$. Calcolare $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ e $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Gli insiemi A_n costituiscono una partizione di $\mathbb{R}$? Gli insiemi $A_n\cap\mathbb{Q}$ costituiscono una partizione di $\mathbb{Q}$?

22. Sia X l'insieme dei punti del piano cartesiano Oxy.
- **a.** Provare che le rette parallele all'asse x formano una partizione del piano X.
- **b.** E' vero che le rette passanti per l'origine formano una partizione di X?
- **c.** Si può ottenere una partizione del piano mediante circonferenze con centro nell'origine?

23. Siano A un insieme, B un suo sottoinsieme e $\{A_i\}_{i\in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di A. Provare oppure confutare mediante controesempi le seguenti affermazioni:
- **a.** Se $\{A_i\}_{i\in I}$ è una partizione di A allora $\{B\cap A_i\}_{i\in I}$ è una partizione di B;
- **b.** Se $\{B\cap A_i\}_{i\in I}$ è una partizione di B allora$\{A_i\}_{i\in I}$ è una partizione di A;

24. Esprimere l'insieme delle soluzioni reali della disequazione $\frac{x+2}{x+1} > 2$, in termini dei sottoinsiemi
$A = \{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le 0\}$ e $B = \{x\in\mathbb{R}\,|\,x\ge -1\}$

25. Esprimere l'insieme delle soluzioni reali della disequazione $\sqrt{x^2-1} > x-2$ in termini dei sottoinsiemi
$A = (-1,\,1)$, $B = \{x\in\mathbb{R}\,|\,x\ge \frac{5}{4}\}$ e $C = \{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le 2\}$

26. Si generalizzi la discussione del problema precedente esprimendo l?insieme delle soluzioni reali della disequazione $\sqrt{P(x)} > Q(x)$ in termini dei sottoinsiemi $A = \{x\in\mathbb{R}\,|\,P(x)\ge 0\}$ $B = \{x\in\mathbb{R}\,|\,xP(x) > Q(x)^2\}$ e $C = \{x\in\mathbb{R}\,|\,Q(x)\le 0\}$

27. Siano A e B due insiemi non vuoti e siano $\{A_1,\,A_2\}$ una partizione di A, $\{B_1,\,B_2\}$ una partizione di B.
- **a.** Provare che $\{A_1\times B_1,\,A_2\times B_2\}$ non è una partizione di $A\times B$.
- **b.** Provare che $\{A_1\times B_1,\,A_1\times B_2,\,A_2\times B_1, A_2\times B_2\}$ è una partizione di $A\times B$.
- **c.** Mostrare che esistono sempre altre partizioni di A B oltre a quella del punto **b.**.

28 Siano X, Y e Z tre insiemi. Si considerino le proposizioni
$$A: x\in X \qquad B: x\in Y \qquad C: x\in Z$$
Combinando A, B, e C mediante gli operatori logici $\wedge$, $\vee$ e $\neg$ esprimere i seguenti fatti
$x\notin A$; $x\in Y\cup Z$; $x\in Y\cap Z$; $x\in X\cap Y\cap Z$; $x\in X\setminus(Y\cap Z)$; $x\in X\cup(Y\cap Z)$; $x\in X\cap(Y\cup Z)$; $x\in(X\cup Y)\cap(X\cup Z)$; $x\in(X\setminus Y)\cap(X\cup Z)$

29. Dimostrare che $(p\wedge q)\vee r$ è equivalente a $(p\vee r)\wedge(q\vee r)$

30. Determinare la tavola della verità di ciascuna delle seguenti forme proposizionali:
(a) $p\wedge(\neg q\vee q)$; (b) $\neg p\vee(q\Rightarrow p)$; (c) $(p\wedge q)\Rightarrow(\neg p\wedge r)$; (d) $(p\vee q)\wedge(\neg p\Rightarrow q)$;
(e) $(p \iff q)\vee(\neg q\vee p)$; (f) $\neg(p \iff \neg q) \iff (q \iff r)$