

1. Sia q un numero razionale diverso da 0 e x ed y due numeri irrazionali. Provare oppure confutare mediante un esempio le seguenti affermazioni:

- $q + x$ e qx sono irrazionali;
- $x + y$ e xy sono irrazionali;
- $x + y$ e xy sono trascendenti se e solo se x e y lo sono;

2.

Provare che

- tra due numeri reali sono compresi infiniti numeri reali;
- tra due numeri reali sono compresi infiniti numeri razionali e infiniti numeri irrazionali;
- tra due numeri reali sono compresi infiniti numeri algebrici e infiniti numeri trascendenti.

3. 10.4. Sia z un qualsiasi numero complesso. Verificare che $z + \bar{z}$ e $z\bar{z}$ sono numeri reali e che $z - \bar{z}$ è immaginario puro.

4. 10.5. Sia z un numero complesso. Verificare che $z = \bar{z}$ se e solo se $z \in \mathbb{R}$.

5.

10.6. Calcolare la parte reale e la parte immaginaria dei seguenti numeri complessi:

$$(1+i)^5; \quad (2-i)^3 - (1-3i)^2; \quad \frac{6+5i}{3-i}; \quad \frac{(2+i)^3}{5i^{15}}; \quad \frac{3-2i}{1+5i}; \quad \frac{2-3i}{2-i}.$$

6. Disegnare nel piano di Gauss i seguenti sottoinsiemi:

- $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > \operatorname{Im}(z)\}$
- $B = \{z \in \mathbb{C} \mid z + \bar{z} = i\}$; $B' = \{z \in \mathbb{C} \mid z - \bar{z} = i\}$
- $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| > 2\}$; $C' = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + i| < |z - 3|\}$
- $D = \{z = (\rho, \theta) \in \mathbb{C} \mid \theta = \frac{\pi}{2}\}$; $D' = \{z = (\rho, \theta) \in \mathbb{C} \mid \rho > 2\}$;
- $E = \{z \in \mathbb{C} \mid z - \bar{z} = 0\}$; $E' = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z^4) = 0\}$.
- $G = \{z = (\rho, \theta) \in \mathbb{C} \mid \theta = \frac{\pi}{3}\}$
- $G = \{z = (\rho, \theta) \in \mathbb{C} \mid \theta = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- $H = \{z = (\rho, \theta) \in \mathbb{C} \mid \rho = 1 \text{ e } 0 \leq \theta \leq \pi\}$.

7. Consideriamo il polinomio $f(X) = 2x^5 - 13x^4 + 37x^3 - 57x^2 + 48x - 18$.

- Verificare che $1 + i$ è radice di $f(X)$.
- Trovare tutte le radici razionali di $f(X)$.
- Determinare la fattorizzazione di $f(X)$ in fattori irriducibili in $\mathbb{R}[X]$.
- Determinare la fattorizzazione di $f(X)$ in fattori irriducibili in $\mathbb{C}[X]$.

8. Trovare tutte le radici complesse del polinomio $x^6 - 8$. Quali tra queste sono reali? Determinare la decomposizione di $x^6 - 8$ nel prodotto di fattori irriducibili in $\mathbb{C}[x]$ e poi in $\mathbb{R}[x]$.

9. Trovare tutte le radici complesse del polinomio $x^6 + 8$. Quali tra queste sono reali? Determinare la decomposizione di $x^6 + 8$ nel prodotto di fattori irriducibili in $\mathbb{C}[x]$ e poi in $\mathbb{R}[x]$.

10. Determinare le radici terze di i e le radici terze di $-i$.

11. Per quali numeri $a \in \mathbb{C}$ l'equazione $x^6 - a = 0$ possiede almeno una radice immaginaria pura?

12. Calcolare parte reale e la parte immaginaria del numero complesso $(1 - i)^{53}$.

13. Calcolare e disegnare nel piano di Gauss le radici quinte di i e le radici terze di $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$