Università degli Studi Roma Tre
AL110 Algebra 1, a.a. 2019/2020

Foglio di esercizi 2

In questi esercizi useremo le seguenti abbreviazioni
R= Riflessiva, S= Simmetrica, T= Transitiva e A= Antisimmetrica

1. Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e siano ρ e σ le relazioni in A date da:

$$x\rho y \quad \text{se e solo se} 2x + 3y \quad \text{è multiplo di} 5 \qquad \text{e} \qquad x\sigma y \quad \text{se e solo se} 2x - 3y \text{ è multiplo di 5.}$$

- **a.** Verificare che ρ è una relazione di equivalenza e scrivere esplicitamente tutte le classi di equivalenza.
- **b.** Provare che invece σ non è una relazione di equivalenza.È' una relazione d'ordine?

2. Siano $A = \{-1, 0, 1\}$ e $B = \{1, 2\}$.

- **a.** Scrivere esplicitamente tutti gli elementi di $A \times B,\ A \times A$ e della diagonale Δ in $A \times A$.
- **b.** Data la relazione $R = \{(-1, 1), (1, 0), (-1, -1), (1, 1), (0, 0)\}$ in $A \times A$, dire quali delle proprietà R, S, T e Astale relazione soddisfa.
- **c.** È una relazione d'ordine? È un ordine totale?
- **d.** Scrivere la relazione inversa R^{-1}.

3. Sia X un insieme, A un suo sottoinsieme e R una relazione in X. Indichiamo con ρ la relazione in A indotta da R ossia:

$$\forall a,\, b \in A \text{ si ha } a\rho b \text{ se e solo se } aRb.$$

Verificare la validità delle seguenti proprietà:

- **a.** se R è una relazione di equivalenza, anche ρ lo è,
- **b.** se R è una relazione di ordine, anche ρ lo è,
- **c.** se R è un ordine totale, anche ρ lo è.
- **d.** È vero che se X è ben ordinato mediante R, anche A lo è mediante ρ

4. Trovare esplicitamente esempi di sottoinsiemi di $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$ tali che, rispetto all'ordinamento usuale $\geq$:

- **a.** non ammettono né minimo né massimo;
- **b.** non ammettono minimo, ma hanno massimo;
- **c.** ammettono minimo e massimo;
- **d.** ammettono minimo m e massimo M tali che $m = M$.

5. In $\mathbb{N}$ si consideri la relazione: $x\rho y$ se x divide y ossia se esiste $k \in \mathbb{N}$, tale che $y = kx$.

- **a.** Verificare che ρ è una relazione d'ordine.
- **b.** È un ordine totale? È un buon ordinamento?
- **c.** Dire se i sottoinsiemi

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{e} \quad B = \{2, 3, 4, 12\}$$

  di $\mathbb{N}$ ammettono minimo e/o massimo rispetto alla relazione ρ.
- **d.** $\mathbb{N}$ ammette minimo e/o massimo rispetto alla relazione ρ?

6. In $\mathbb{Z}$ si consideri la relazione: $x\sigma y$ se esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $y = kx$

- **a.** Verificare che σ è una relazione d' ordine.
- **b.** È un ordine totale? È un buon ordinamento?
- **c.** Esiste un elemento di $\mathbb{Z}$ confrontabile con tutti gli altri?
- **d.** Quali elementi sono confrontabili con -3?
- **e.** Trovare oppure provare che non esistono il massimo e il minimo rispetto a σ dei seguenti sottoinsiemi:

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}, \quad \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 0\} \quad P = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ è pari}\} \quad D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ è dispari}\}$$

7. Sia A un insieme dotato di una relazione d'ordine ρ rispetto alla quale A risulta ben ordinato. Provare che ρ è necessariamente un ordine totale.

8. Trovare esempi di relazioni in $\mathbb{N}$ che godano:

a. della proprietà R e non di S, T, A;
b. della proprietà S e non di R, T, A;
c. della proprietà T e non di R, S, A;
d. della proprietà A e non di R, S, T.

9. In $\mathbb{N}$ si consideri la relazione $x\rho y$ se $x = y$ oppure se $2x$ divide y.

a. Provare che si tratta di una relazione d'ordine. È un ordine totale?
b. Provare che$\{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ è un sottoinsieme totalmente ordinato rispetto a ρ.
c. Sia D il sottoinsieme di $\mathbb{N}$ dei numeri dispari. Provare che ρ ristretta a D è una relazione di equivalenza e caratterizzare le classi di equivalenza.

10. In $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si consideri la relazione $(a, b)\rho(c, d)$ se $a + b < c + d$ oppure $a + b = c + d$ e $a? \leq c$

a. Verificare che si tratta di una relazione d?ordine totale;
b. provare che $(0, 0)$ è il minimo di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$;
c. scrivere le 6 coppie successive a $(0, 0)$ rispetto all'ordine ρ;
d. provare che per ogni coppia (a,b) ci sono solo un numero finito di coppie che la precedono rispetto alla relazione ρ

11. In $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si consideri la relazione $(a, b)\sigma(c, d)$ se $a < c$ oppure $a = c$ e $b \leq d$. Verificare che si tratta di una relazione d'ordine totale e provare che $(0, 0)$ è il minimo di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

12. In $N \times \mathbb{N}$ si consideri la relazione $(a, b)\rho(c, d)$ se $a + b < c + d$ oppure $a + b = c + d$ e $a \leq c$.

a. Verificare che si tratta di una relazione d'ordine totale;
b. provare che $(0,\ 0)$ è il minimo di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$;
c. provare che per ogni coppia (a, b) ci sono solo un numero finito di coppie che la precedono rispetto alla relazione ρ.

13. Dire quali delle proprietà R, S, T, A soddisfa la relazione ? in A nei seguenti casi:

a. $A = \mathbb{Z}$, $x\rho y$ se $x - y = n^2$ per un qualche $n \in \mathbb{Z}$.
b. $A = \mathbb{Z}$, $x\rho y$ se $x - y = n^5$ per un qualche $n \in \mathbb{Z}$
c. $A = \mathbb{R}$, $x\rho y$ se $|x| = |y|$;
d. $A = \mathbb{R}$, $x\rho y$ se $|x| \leq |y|$;
e. $A = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $x\rho y$ se $xy - 1$ può essere scritto come frazione $\frac{m}{n}$ con m e n interi dispari
f. $A = \mathbb{N}$, $x\rho y$ se $x - y = 3n$ per un qualche $n \in \mathbb{N}$;
f. $A = \mathbb{N}$, $x\rho y$ se $x - y = 3n$ per un qualche $n \in \mathbb{Z}$;

In caso si tratti di una relazione d'ordine, dire se si tratta di un ordine totale. In caso si tratti di una relazione di equivalenza, determinare esplicitamente gli elementi di una classe a scelta.

14. Si consideri in $\mathbb{R}$ la relazione $x\rho y$ se e solo se $x - y \in \mathbb{Z}$. Verificare che è una relazione di equivalenza e scrivere esplicitamente $[1]$, $[\sqrt{2}]$, $[1.5]$. Provare che ogni classe di equivalenza $[x]$ ha uno ed un solo rappresentante x_0 tale che $0 \leq x_0 \leq x_1$. Identificare lo spazio quoziente.

15. Si consideri in $\mathbb{R}$ la relazione $x\rho y$ se e solo se $x - y \in \mathbb{Q}$. Verificare che è una relazione di equivalenza e scrivere esplicitamente $[1]$, $[\sqrt{2}]$, $[1.5]$. È vero che ogni classe di equivalenza $[x]$ ha uno ed un solo rappresentante x_0 tale che $0 \leq x_0 \leq x_1$?

16.. Siano X un insieme non vuoto e $\rho \subset X \times X$ una relazione in X e denotiamo con $\Delta \subset X \times X$ la diagonale. Provare che:

a. ρ soddisfa le proprietà R,S,T,A se e solo se $\rho = \Delta$;
a. . ρ è riflessiva se e solo se $\Delta \subseteq \rho$;
a. ρ è simmetrica se e solo se $\rho^{-1} = \rho$;
a. ρ è antisimmetrica se e solo se $\rho \cap \rho^{-1} = \Delta$;

17.. Siano A un insieme con almeno 3 elementi e $X = A \times A \times A$. Consideriamo la relazione τ in X data da:

$$(a,\ b,\ c)\tau(a',\ b',\ c') \qquad \Longleftrightarrow \qquad \{a,\ b,\ c\} = \{a',\ b',\ c'\}$$

a. Verificare che τ è una relazione di equivalenza.
b. Fissati 3 elementi distinti a, b, c di A determinare esplicitamente le classidi equivalenza di $(a,\ b,\ c)$, (a, b, a) e (c, c, c).
c. posto $A = 1, 2, 3$, elencare tutti gli elementi di X e scrivere la partizione di X associata a τ .