Università degli Studi Roma Tre
AL110 Algebra 1, a.a. 2019/2020

Foglio di esercizi 3

1. Sia $A = \{n \in \mathbb{N} \,|\, 1+2+\ldots n = \frac{(n+3)(n-2)}{2}\}$. Provare che se n appartiene ad A allora anche $n+1$ appartiene ad A. È vero che $A = \mathbb{N}$?

2. Mostrare che $n! > 2^n$ per ogni $n \geq 4$.

3. Si mostri come in un gruppo di $n \geq 2$ persone ce ne sono almeno due che hanno lo stesso numero di amici.

4. Sia $n \geq 2$. Si mostri come se si scelgono $n+1$ interi postivi arbitrariamente, deve esistere almeno una coppia la cui differenza è divisibile per n.

5. Dimostrare che per ogni $n \geq 2$ vale:

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

6. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ vale:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$