Università degli Studi Roma Tre
AL110 Algebra 1, a.a. 2019/2020

Foglio di esercizi 6

Useremo la seguente notazione: Dato un anello A ed un intero positivo n si denota con nA il seguente insieme:

$$nA = \{a \in A \,|\, a = nb = b + \cdots + b \ (n \,\text{volte}),\ \text{per qualche } b \in A\}$$

1. Consideriamo $\mathbb{Z}/54\mathbb{Z}$, l'anello delle classi di resto modulo 54.

a) Trovare un intero n, $0 \leq n \leq 54$, tale che $[n] = [125]$. Ne esiste più d'uno?
b) Esiste un intero pari nella classe di 125?
c) Esiste un intero che sia multiplo di 3 nella classe di 125?
d) Sia m un intero fissato. Provare che esiste almeno un intero s, con $100 \leq s \leq 200$, tale che $[m] = [s]$.

2. Determinare esplicitamente l'insieme delle potenze della classe di 2 e di quella di 3 in $\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$, e $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$.

3. Sia I l'insieme dei multipli di $[4]$ in $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.

a) Considerare la relazione di equivalenza in $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ data da $[a]\rho[b]$ se e solo se $[a] - [b] \in I$. Quante sono le classi di equivalenza?
b) Determinare esplicitamente l'insieme dei multipli di $[10]$ in $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.
c) Verificare che $[10] \cdot [13] = [10] \cdot [4]$ in $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.

4. Provare che in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $[2]$ è un elemento primo. È vero che $[2]$ in quanto elemento primo è anche irriducibile?

5. Nell'anello $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$:

a) determinare tutti gli elementi invertibili e le loro classi;
b) determinare tutti gli zero-divisori;
c) trovare tutti gli elementi $[b]$ tali che $[b] \cdot [16] = 0]$;
d) Provare che $[5^k]$ è invertibile in $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

6. L'equazione $[3522] \cdot [x] = [1]$ ha soluzioni in $\mathbb{Z}/500\mathbb{Z}$?

7. Trovare un intero n tale che $([n]_4, [n]_9) = ([3]_4, [7]_9)$ in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$. Ne esiste più d'uno?

8. Sia A l'anello prodotto $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

a) Verificare che $([1]_4, [2]_6)$ è uno zero divisore e che
b) Verificare che $([1]_4, [5]_6)$ è una unità.
c) Determinare l'insieme $6A$
d) Sia $B = \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$, determinare $6B$.
e) Provare che non esiste alcuna applicazione biunivoca $f : A \to B$ tale che $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
f) Determinare l'insieme dei multipli di $([2]_4, [2]_6)$ in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

9. Determinare la cifra delle unità del numero 3477^{159}.

10. Determinare il numero n, con $0 \leq n \leq 7$, tale che $[n] = [857342^{124}]$ in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

11. Determinare il nucleo e l'immagine dell'applicazione $f : \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ definita da $f([x]_{24}) = ([x]_6, [x]_4)$

12. Determinare le soluzioni dell'equazione $3x^2 - 2 = 0$, nell'anello $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

13. Trovare le soluzioni di $x^2 = 1$, e di $x^3 = 1$, negli anelli $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.