Università degli Studi Roma Tre
AL110 Algebra 1, a.a. 2019/2020

Foglio di esercizi 8

1. Scrivere la tavola di moltiplicazione dei seguenti gruppi

- $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- S_3 il gruppo simmetrico su tre elementi
- D_4 il gruppo diedrale di ordine 8 (simmetrie del quadrato)

2. Sia $G = \{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$ dimostrare che G è un gruppo per l'addizione. Dimostrare che $G^* = G \setminus \{0\}$ è un gruppo rispetto alla moltiplicazione.

3. Dimostrare che se $o(g) = n$ allora $g^{-1} = g^{n-1}$.

4. Sia g un elemento di un gruppo G, dimostrare che g e g^{-1} hanno lo stesso ordine

5. Se g e h sono elementi di un gruppo finito G allora $o(g) = o(h^{-1}gh)$. Dedurre che $o(ab) = 0(ba)$, per ogni $a, b \in G$.

6. Sia G un gruppo finito e sia $|G|$ la sua cardinalità. Dimostrare che se g è un elemento di G allora $o(g) \leq |G|$.

7. Sia g un elemento di G e sia $< g >= \{g^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$. Dimostrare che $< g >$ è un sottogruppo di ordine $o(n)$. $< g >$ è detto il sottogruppo ciclico generato da g.

8. Dimostrare che ogni gruppo finito di ordine pari contiene un elemento di ordine 2.

9. Dimostrare che un gruppo G è abeliano se e soltanto se l'applicazione $g \mapsto g^{-1}$ di G in se stesso è un omomorfismo di gruppi.

10. Determinare se i gruppi delle seguenti coppie sono isomorfi tra loro

- $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
- S_3 e $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
- D_4 e $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$
- D_4 e $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$