Università degli Studi Roma Tre
AL110 Algebra 1, a.a. 2019/2020

Foglio di esercizi 5

1. Sia X l'insieme delle parti non vuote di $\mathbb{N}$ e sia $<$ la relazione binaria su X definita ponendo

$$A < B :\iff (A = B) \vee (min(A) < min(B))$$

dove, per ogni insieme $S \in X$, $min(S)$ denota il minimo di S, rispetto all'ordine usuale su $\mathbb{N}$.

a) Si verifichi che $(X, <)$ è un insieme parzialmente ordinato, e si dica se esso è totalmente ordinato.
b) Si trovino, laddove esistano, tutti gli elementi minimali di $(X, <)$.
c) Si trovino, laddove esistano, tutti gli elementi massimali di $(X, <)$
d) Si trovi, laddove esista, una catena in $(X, <)$ (i.e., un sottoinsieme totalmente ordinato di $(X, <)$) priva di maggioranti in $(X, <)$.

2. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione data da $f(n) = 4n + 1$ se n è pari e $f(n) = 3n - 2$ se n è dispari. Dire se si tratta di una applicazione iniettiva, suriettiva, biunivoca. Determinare esplicitamente gli insiemi controimmagine di 0, 1 e 3.

3. Se m ed n sono due numeri naturali tali $m + n$ è primo allora m e n sono coprimi.

4. Dato un insieme X. Verificare se per ogni coppia d'inisiemi $A, B \subset X$ risulti

$$(A \cap \mathcal{C}_X(B)) \cup (\mathcal{C}_X(A) \cap B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

5. Sia $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definita da

$$f((x, y)) = (xy, x + y).$$

Sia $A = \{(n, 1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ e $B = \{(n, n + 1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Determinare gli insiemi $f^{-1}(f(A))$ e $f(f^{-1}(B))$.

6. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$.

a) Determinare l'immagine di f, dire se f è iniettiva
b) Descrivere esplicitamente la relazione nucleo ρ_f
c) Determinare esplicitamente $\mathbb{R}/\rho_f$

7. Determinare $\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} B_k$ e $\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} B_k$, nei seguenti casi:

a) $B_k = [\frac{3}{k}, \frac{5k+2}{k}) \cup \{10 + k\}$.
b) $[-1, 3 + \frac{1}{k}) \cap [5, \frac{5k+1}{k})$.
c) Determinare esplicitamente $\mathbb{R}/\rho_f$

8. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definita da

$$f(n) = \mathrm{MCD}(n, 77)$$

a) Calcolare $f(140)$, $f(236)$, $f(1980)$ e $f(2387)$.
b) Determinare l'immagine di f e verificare che f non 'e iniettiva.
c) Descrivere tutte le classi di equivalenza di N rispetto alla relazione nucleo di f.

9. Si dimostri per induzione che per ogni $n \geq 1$ risulta

$$\sum_{k=0}^{n} k3^k = \frac{3}{4}\left((2n - 1)3^n + 1\right)$$

10. Sia X un insieme non vuoto e sia Y l?insieme di tutte le funzioni$f : X \to X$. Si definisca in X la seguente relazione:

$$f \rho g \iff f = g \quad \text{oppure} \quad \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(g)$$

Verificare che tale relazione è una relazione d'ordine e determinare gli elementi massimali e minimali di Y .

11. Sull'insieme $A = \{(x,\, y) \,|\, x, y \in \mathbb{N}, x, y \geq 2\}$ si definisca una relazione $\trianglelefteq$ ponendo

$$(a,\, b) \trianglelefteq (c,\, d) \ \text{ se } \ a \leq c \ \ e \ \ b|d$$

1) Si provi che $\trianglelefteq$ è una relazione di ordine su A. 2) Si determini gli eventuali massimo, minimo ed elementi massimali e minimali di A 3) Sia $D = \{(x,\, y) \in A \,|\, a + y = 10\}$ si determino maggioranti e minoranti di D.