Universià degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2013/2014
AL210 - Algebra 2 Esercitazione del 7 Novembre 2013

Esercizio 1. Sia $\sigma = (\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_r)$ un ciclo di S^n e sia τ una qualsiasi permutazione. Dimostrare che $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(\alpha_1)\,\tau(\alpha_2)\,\dots\tau(\alpha_r))$.

Esercizio 2. Dimostrare che due elementi di S_n sono coniugati se e soltano se hanno la stessa struttura ciclica (cioè entrambi si spezzano in m cicli disgiunti di lunghezza $k_1, \dots k_m$. Dedurre che le classi di coniugio di S_n sono in corrispondenza biunivoca con le partizioni di n.

Esercizio 3. Determinare esplicitamente le classi di coniugio di S_5 e verificare che l'equazione delle classi risulti soddisfatta.

Esercizio 4. Dimostrare che A_5 è l'unico sottogruppo normale di S_5

Esercizio 5. Dimostrare che A_5 non ha sottogruppi normali.

Esercizio 6. Dimostrare che fissato $i \in 1, \dots, n$, le $n-1$ trasposizioni:

$$(i\,1),\,(1\,2),\,\dots,(i\,k),\,\dots,(i\,n),$$

con $k \neq i$, generano S_n.

Esercizio 7. Dimostrare che fissati $i, j \in 1, \dots, n$, con $i \neq j$, gli $n-2$ 3-cicli:

$$(i\,j\,1),\,(1\,j\,2),\,\dots,(i\,j\,k),\dots,(i\,j\,n),$$

con $k \neq i, j$, generano A_n.