Esercitazione del corso GE210 del 10 Ottobre 2017

1. Sia $B_M(\overline{v},\, w) = -v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 + v_4w_4$, la forma di Minkowski su $\mathbb{R}^4$.
   - Determinare tutti i vettori tali che $B(\overline{v},\, \overline{v}) = 0$
   - Dati $\overline{v} = (\sqrt{3},\, -1,\, -1,\, -1)$ e $\overline{w} = (2,\, 0,\, 1,\, 0)$ determinare $\overline{v}^{\perp}$ e $\overline{w}^{\perp}$.
   - Dato il sottospazio $V \subset \mathbb{R}^4$ generato da $\overline{v}_1 = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 - \overline{e}_3$ e $\overline{v}_2 = \overline{e}_4 - \overline{e}_1 - \overline{e}_3$. Scrivere la matrice di B ristretta V rispetto alla base $\{\overline{v}_1,\, \overline{v}_2\}$ e calcolarne il rango. Determinare se V ammette un complemento ortogonale. Determinare esplicitamente $V^{\perp}$.
   - È vero che tutti i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ ammettono un complemento ortogonale rispetto a B?

2. Sia $B(\overline{v},\, \overline{w}) = v_1w_1 + v_1w_2 + v_2w_2 + v_2w_1 + v_3w_4 + v_3w_3 + v_4w_3 + v_4w_4$, su K^4
   - Tutti i vettori tali che $B(\overline{v},\, \overline{v}) = 0$
   - Dato il sottospazio $V \subset K^4$ generato da $\overline{v}_1 = \overline{e}_1 - \overline{e}_3$ e $\overline{v}_2 = \overline{e}_4 - \overline{e}_2$, Scrivere la matrice di B ristretta V rispetto alla base $\{\overline{v}_1,\, \overline{v}_2\}$ e calcolarne il rango. Determinare se V ammette un complemento ortogonale. Determinare esplicitamente $V^{\perp}$.

3. Sia $B(\overline{v},\, \overline{w}) = 2v_1w_1 - v_2w_2 + v_2w_1 - v_3w_4 + v_3w_3 - 2v_4w_3$, su K^4.
   - Dato $\overline{v} = (1,\, 1,\, 1,\, 1)$ detrminare $v^{\perp_L}$ e $v^{\perp_R}$. $< \overline{v} >$ ammette un complemento ortogonale?
   - Dato il sottospazio $V \subset K^4$ generato da $\overline{v}_1 = \overline{e}_1 - \overline{e}_3$ e $\overline{v}_2 = \overline{e}_4 - \overline{e}_2$ determinare $V^{\perp_L}$ e $V^{\perp_R}$.

4. Consideriamo $(\mathbb{R}^4, B_M)$ e $(\mathbb{R}^4, B_s)$, dove B_M è la forma di Mikowski definita nell'esercizio 1 e $B_s(\overline{v},\, w) = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 + v_4w_4$ è la forma standard. Calcolare l'operatore aggiunto dei seguenti operatori lineari da $(\mathbb{R}^4, B_M)$ a $(\mathbb{R}^4, B_s)$
   - $Id : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.
   - $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, tale che $T(\overline{e}_1) = \overline{e}_2$, $T(\overline{e}_2) = \overline{e}_1$, $T(\overline{e}_3) = \overline{e}_3 + \overline{e}_4$, e $T(\overline{e}_4) = \overline{e}_3 - \overline{e}_4$
   - $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ data, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$, dalla matrice $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

5. Sia $V = K^4$ con la forma bilineare B_1 data da $B_1(\overline{v},\, \overline{w}) = 2v_1w_1 - v_2w_2 + v_2w_1 - v_3w_4 + v_3w_3 - 2v_4w_3$ e $U = K^3$ con la forma bilineare $B_2(\overline{v},\, \overline{w}) = v_1w_1 + 2v_2w_2 + v_2w_1 + v_2w_3 - 2v_3w_3$. Sia $T : K^4 \to K^3$, data da $T(v_1,\, v_2,\, v_3,\, v_4) = (v_1 - v_3 + v_4, v_2, v_2 + v_1)$. Determinare la matrice di T^{adj} rispetto alle basi canoniche di K^4 e K^3.