Esercitazione del corso GE210 del 17 Ottobre 2017

1. Sia data la forma bilineare simplettica $B(\overline{v}, \overline{w}) = v_1w_3 - v_1w_4 + v_2w_3 - v_3w_1 - v_3w_2 + v_4w_1$ su K^4, per ognuna delle seguenti coppie iperboliche trovare una prodotto di trasvezioni simplettiche che mandi la prima coppia nella seconda

- $((1,\, 0,\, 1,\, 0), (-1,\, 0,\, 0,\, 0))$ e $((0,\, 1,\, 0,\, 1), (0,\, 0,\, 1,\, 0))$
- $((1,\, 1,\, 1,\, 2), (1,\, 0,\, 1,\, 1))$ e $((1,\, 1,\, -2,\, -4), (1,\, 1,\, 1,\, 1))$
- $((2,\, 3,\, -2,\, -2), (-1,\, 0,\, 1,\, 2))$ e $((0,\, 0,\, 0,\, 1), (1,\, 1,\, 1,\, 1))$

2. Data la forma di bilineare simplettica $B(\overline{v}, \overline{w}) = v_1w_2 - v_2w_1$ su K^2, verificare che le seguenti trasformazioni lineari, date tramite la matrice che le rappresenta rispetto alla base canonica, siano simplettiche e scriverle come prodotto di trasvezioni:

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

3. Data la forma di bilineare simplettica $B(\overline{v}, \overline{w}) = -v_1w_2 + v_2w_1$ su K^2, verificare che le seguenti trasformazioni lineari, date tramite la matrice che le rappresenta rispetto alla base canonica, siano simplettiche e scriverle come prodotto di trasvezioni:

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

4. Sia data la forma bilineare simplettica $B(\overline{v}, \overline{w}) = v_1w_3 - v_1w_4 + v_2w_3 - v_3w_1 - v_3w_2 + v_4w_1$ su K^4, e sia $T : K^4 \to K^4$ data da

$$T \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_3 \\ v_2 + v_3 \\ v_2 + v_4 \end{pmatrix}$$

- Verificare che T è simplettica
- Scrivere K^4 come somma ortogonale di due piani iperbolici
- Scrivere T come prodotto di trasvezioni

Diagonalizzare le seguenti forme quadratiche su $\mathbb{Q}$. (trovare una base in cui la forma quadratica sia senza termini misti, e scriverla rispetto a tale base)

- $q(v) = v_1^2 + 4v_1v_2 + 2v_1v_3 + 5v_2^2 + 2v_2v_4 - 2v_3^2 - 2v_3v_4$
- $q(v) = 4v_1^2 + 2v_1v_2 +_2 v_1v_3 + 2v_1v_4 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2$
- $q(v) = v_1^2 - 4v_1v_2 + 6v^2 - 2v_2v_3 + v_3^2 + v_4^2$
- $q(v) = v_1^2 - 2v_1v_2 - 4v_1v_3 +_2 v_3^2 + 2v_2v_4 + 9v_3^2 + 7v_4^2$
- $q(v) = -4v_1^2 + 6v_1v_2 - 4v_1v_3 +_2 v_1v_4 - 3v^2 + 4v_2v_3 - 2v_2v_4 - 2v_3^2 + 2v_3v_4 - v_4^2$
- $q(v) = v_1^2 + 4v_1v_2 + 7v_2 + 10v_2v_4 + v_3^2 + 8v_4^2$