Esercitazione del corso GE210 del 3 Ottobre 2017

1. Determinare quali delle seguenti sono forme bilineari su $V = K^4$, K campo. di caratteristica zero.
   - $B(\overline{v}, \overline{w}) = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_4 + v_4w_1 + v_4w_4$
   - $B(\overline{v}, \overline{w}) = 3v_1w_1 + 5v_2w_4 + w_3 + v_3w_3 + 2v_4w_1 + v_4w_3$
   - $B(\overline{v}, \overline{w}) = 5v_1w_1 + 2v_1w_3 + v_2w_3 + v_3w_3 + v_3w_4 - 2v_4w_1 + v_4w_2 - 3v_4w_4$
   - $B(\overline{v}, \overline{w}) = \sum_{i=0}^{4}(v_i + w_i)^2 - \sum_{i=0}^{4}(v_i)^2 - \sum_{i=0}^{4}(w_i)^2$
   - $B(\overline{v}, \overline{w}) = v_1w_1 + v_2w_2 + v_2w_4 + v_4w_1 + v_4w_2 + v_4w_4$
   - $B(\overline{v}, \overline{w}) = v_1w_1 + v_2w_2 + v_2w_4 + v_4w_1 + v_4w_2 + v_4w_4 + 3$
   - $B(\overline{v}, \overline{w}) = -v_1w_1 - 2v_1w_4 + v_2w_2 - v_2w_4 - 3v_3w_4 - 3v_4w_3 - 2v_4w_1 + v_4w_4 - v_4w_2$
   - $B(\overline{v}, \overline{w}) = -2v_1w_3 + 4v_1w_4 - 5v_2w_3 + v_2w_4 + 2v_3w_1 + 5v_3w_2 - 3v_3w_4 + 3v_4w_3 - 4v_4w_1 - v_4w_2$

2. Per ogni forma bilineare trovata in 1. determinare
   - la matrice che rappresenta B rispetto alla base canonica di K^4.
   - Il rango di B
   - Se B è simmetrica o antisimmetrica, in caso non fosse nessuna delle due scrivere B come somma di una forma bilineare simmetrica ed una antisimmetrica.
   - $\mathrm{rad}^L B$ e $\mathrm{rad}^R B$

3. Sia $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(K)$ e consideriamo la forma
$$F_M : V \times V \to K$$
$$(A, B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tAMB)$$
   - Dimostrare che F_M è una forma bilineare.
   - Scrivere la matrice di F_M rispetto alla base canonica di V (ricordo che la base canonica di $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(K)$ è data da
$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   - Determinare se F_M è simmetrica o antisimmetrica, in caso non fosse nessuna delle due scrivere B come somma di una forma bilineare simmetrica ed una antisimmetrica.
   - $\mathrm{rad}^L F_M$ e $\mathrm{rad}^R F_M$

4. Sia adesso $M \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(K)$ qualsiasi e sia F_M la forma bilineare definita come nell'esercizio 3.
   - Dimostrare che F_M è una forma bilineare.
   - Scrivere la matrice di F_M rispetto alla base canonica.
   - Determinare per quali M la forma bilineare F_M è simmetrica.