Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2015/2016

GE220 - Geometria 3 - Tutorato I

DOCENTE: PROF. MASSIMILIANO PONTECORVO

TUTORI: M. BRUNO, A. GALOPPINI

ESERCIZIO 0 Sia $X = \{a, b, c, d, e\}$.
Dire quali tra le seguenti famiglie di insiemi è una topologia su X.
(a) $\{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{e\}, \{a, e\}, \{b, e\}, \{a, b, e\}, \{a, b\}\}$
(b) $\{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, c\}\}$
(c) $\{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{d, e\}, \{a, d, e\}, \{b, d, e\}, \{a, b, d, e\}\}$

ESERCIZIO 1 Sia $X \neq \emptyset$ un insieme. Si consideri la famiglia $\mathcal{C} = \{A \subset X \mid |A^c| < \infty\} \cup \{\emptyset\}$.
(a) Dimostrare che tale famiglia è una topologia su X (detta *topologia cofinita*);
(b) Per quali insiemi X la topologia $\mathcal{C}$ coincide con la topologia discreta?
(c) Si dica se le seguenti successioni convergono in $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$, e in caso affermativo si dica a quali punti convergono:
$\{x_n = n\}_{n\in\mathbb{N}}$
$\{x_n = 0\}_{n\in\mathbb{N}}$
$\{x_n = (-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$
$\{x_n = \frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$
(d) Si dia una caratterizzazione delle successioni convergenti in $(X, \mathcal{C})$ con X insieme non vuoto qualsiasi.

ESERCIZIO 2 Sia $X := \{1, 2\}$ e si consideri la topologia $\mathcal{T} := \{\emptyset, X, \{1\}\}$.
(a) Si dica a cosa converge la successione $\{x_n = 1\}_{n\in\mathbb{N}}$;
(b) Si esibiscano gli omeomorfismi di $(X, \mathcal{T})$ in sé stesso.

ESERCIZIO 3 Si consideri la famiglia $\mathcal{S} = \{[a, b) | a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.
(a) Si dimostri che $\mathcal{S}$ è base per una topologia su $\mathbb{R}$ ($(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ è detta *retta di Sorgenfrey*);
(b) Si discuta la convergenza delle successioni $\{x_n = \frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{x_n = -\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$.

ESERCIZIO 4 Siano $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ due topologie su un insieme X, con $\mathcal{T} < \mathcal{T}'$. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in X. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false, giustificando la risposta.
(a) $\mathcal{T}$ è base per $\mathcal{T}'$
(b) $\mathcal{T}'$ è base per $\mathcal{T}$
(c) x_n converge a x in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}) \Rightarrow x_n$ converge a x in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}')$
(d) x_n converge a x in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}') \Rightarrow x_n$ converge a x in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$

ESERCIZIO 5 Si consideri $\mathbb{R}$ dotato della topologia cofinita. Si discuta la continuità delle seguenti funzioni:

$$f(x) := \begin{cases} 3 & \text{se } x = 1 \\ \frac{x^2}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \end{cases}$$

$$g(x) := \sin x$$

Si caratterizzino poi le funzioni continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$.

ESERCIZIO 6 Esibire un omeomorfismo tra le seguenti coppie di sottospazi di $(\mathbb{R}, \epsilon)$:
(a) $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $\mathbb{R}$;
(b) $\{\overline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \overline{x} \neq 0, ||\overline{x}|| < 1\}$ e $\{\overline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid ||\overline{x}|| > 1\}$.

Esercizio 7 Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ponga $\mathcal{T}_\alpha := \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(\alpha - r, \alpha + r) \mid r > 0\}$
(a) Si dimostri che $\mathcal{T}_\alpha$ è una topologia $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;
(b) Si stabilisca se $\mathcal{T}_0$ e $\mathcal{T}_1$ sono confrontabili;
(c) Si discuta la convergenza della successione $\{\frac{n+1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ nelle topologie $\mathcal{T}_0$ e $\mathcal{T}_1$;
(d) Si dica, gistificando la risposta, se può esistere una metrica d i cui aperti siano esattamente gli elementi di $\mathcal{T}_\alpha$ (se esiste, lo spazio $(X, \mathcal{T}_\alpha)$ si dice *metrizzabile*).

Esercizio 8 Sia $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1,\ xy > 0\}$ dotato della topologia indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}^2$. Dopo aver stabilito se X è aperto e/o chiuso in $\mathbb{R}^2$, mostrare che $Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1,\ x > 0,\ y > 0\}$ è chiuso in Y ma non in $\mathbb{R}^2$. Mostrare inoltre che Y è anche aperto in X.