

**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2015/2016**  
**GE220 - Geometria 3 - Tutorato X**

DOCENTE: PROF. MASSIMILIANO PONTECORVO

TUTORI: A. GALOPPINI, M. BRUNO

ESERCIZIO 0 Sia  $X := [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$  munito della topologia euclidea, e  $f : X \rightarrow X$  un omeomorfismo. Si dimostri che  $f(\partial X) = \partial X$ .

ESERCIZIO 1 Calcolare il gruppo fondamentale di  $Z = S^2 \cup \{x = 0\} \cup \{y = 0\} \cup \{z = 0\}$ .

ESERCIZIO 2 Dimostrare che  $S^1$  è omotopicamente equivalente alla palla chiusa spuntata  $B = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(0, 0)\}$ . Stabilire se è anche omotopicamente equivalente alla palla aperta spuntata  $B = \{x^2 + y^2 < 1\} \setminus \{(0, 0)\}$ .

ESERCIZIO 3 Si calcoli il gruppo fondamentale di un insieme stellato.

ESERCIZIO 4 Si dia un esempio di spazi  $X$  e  $Y$  tali che:

- $X \subset Y$ ;
- $X$  e  $Y$  sono omotopicamente equivalenti ma non omeomorfi;
- $X$  e  $Y$  non semplicemente connessi.

ESERCIZIO 5 Dare un esempio di spazio semplicemente connesso e non contraibile.

ESERCIZIO 6 Dimostrare che l'equivalenza omotopica è transitiva, ovvero se  $X$  è omotopicamente equivalente a  $Y$  e  $Y$  è omotopicamente equivalente a  $Z$  allora  $X$  è omotopicamente equivalente a  $Z$ .

ESERCIZIO 7 Dimostrare che  $S^{n-1}$  e  $\mathbb{R}^n \setminus B_1^n(0)$  sono omotopicamente equivalenti.

ESERCIZIO 8 Sia  $U := (\{z = 0\} - \{x^2 + y^2 \leq 1\})$ . Calcolare il gruppo fondamentale dei seguenti sottospazi di  $\mathbb{R}^3$ , quindi stabilire quali sono omotopicamente equivalenti fra loro.

(a)  $X := U \cup (S^2 \cap \{z \geq 0\})$

(b)  $Y := U \cup (\{x^2 + y^2 = 1\})$

(c)  $W := U \cup S^2$

(d)  $Z := U \cup (\{x^2 + y^2 - (z + 1)^2 = 0\} \cap \{z \leq 0\}) \cup (\{x^2 + y^2 - (z - 1)^2 = 0\} \cap \{z \geq 0\})$