Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2015/2016

GE220 - Geometria 3 - Tutorato II

DOCENTE: PROF. MASSIMILIANO PONTECORVO

TUTORI: M. BRUNO, A. GALOPPINI

ESERCIZIO 0 Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e sia A un sottoinsieme di X.
(a) Mostrare che $Int(A) \subseteq Ext(Ext(A))$;
(b) Trovare un controesempio che mostri che in generale l'uguaglianza non sussiste.

ESERCIZIO 1 Sia $X = \mathbb{R}^2$, e sia $\mathcal{T} := \{B_r(0,0)\}_{r\in\mathbb{R}}$ la famiglia delle palle aperte di centro l'origine e raggio r.
(a) Dimostrare che $T_0 := T \cup \{\emptyset\} \cup \{X\}$ è una topologia su X;
(b) Conftontare tale topologia con quella euclidea per finezza;
(c) Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in $\mathbb{R}^2$ convergente a un punto (x_0, y_0) nella topologia euclidea. Cosa si può dire sulla sua convergenza nella topologia T_0?
(d) Dire se T_0 ammette base numerabile;
(e) Dare una caratterizzazione degli insiemi densi in (X, T_0), quindi stabilire se (X, T_0) è separabile.

ESERCIZIO 2 In $(\mathbb{R}, \epsilon)$ si consideri l'insieme $Y := [-1, 1] \cup \{2\}$ munito della topologia indotta da ϵ. Si dica se i seguenti sottoinsiemi di Y sono aperti e/o chiusi in Y:
(a) $(0, 1]$;
(b) $[0, 1]$;
(c) $\{2\}$;
(d) $(0, 1) \cap \{\frac{1}{n}\}^c_{n\in\mathbb{N}}$

ESERCIZIO 3 Sia (I, ρ) un insieme dotato di una relazione d'ordine totale. Per ogni $\alpha \in I$ si consideri la famiglia $T_\alpha := \{x \in I | \alpha\, \rho\, x\}$.
(a) Si dimostri che $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I} \cup \{\emptyset\}$ è base per una topologia T_{ro} su I (detta *right order topology*);
(b) Far vedere con un controesempio che tale base non è necessariamente una topologia. Determinare poi una condizione necessaria e sufficiente su (I, ρ) affinchè lo sia;
(c) Si consideri il caso $(I, \rho) = (\mathbb{R}, \leq)$. Determinare la frontiera di $\{0\}$;
(d) Determinare la chiusura dell'insieme T_α al variare di α in $\mathbb{R}$;
(e) Stabilire se $f : x \to |x|$ è o meno continua in 0, vista prima come funzione da $(\mathbb{R}, \epsilon)$ a $(\mathbb{R}, T_{ro})$ e poi come funzione da $(\mathbb{R}, T_{ro})$ a $(\mathbb{R}, \epsilon)$.

ESERCIZIO 4 Siano (X, T_X) e (Y, T_Y) due spazi topologici. Supponiamo che Y sia di Hausdorff, e che A sia un sottoinsieme denso di X. Siano f e g funzioni continue da X a Y.
Dimostrare che se $f_{|A} \equiv g_{|A}$ allora $f \equiv g$;

ESERCIZIO 5 Siano $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ due topologie su un insieme X, con $\mathcal{T} < \mathcal{T}'$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false, giustificando la risposta.
(a) $(X, \mathcal{T})$ è di Hausdorff $\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T}')$ è di Hausdorff
(b) $(X, \mathcal{T}')$ è di Hausdorff $\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T})$ è di Hausdorff
(c) $(X, \mathcal{T})$ è separabile $\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T}')$ è separabile
(d) $(X, \mathcal{T}')$ è separabile $\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T})$ è separabile

ESERCIZIO 6 Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico, U,V densi in X, $U \in \mathcal{T}$.
(a) Mostrare che $U \cap V$ è denso in X;
(b) Mostrare che l'ipotesi che U sia aperto è necessaria.

ESERCIZIO 7 Si consideri l'insieme A così definito:

$$\{\tfrac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}} \cup (2,3) \cup (3,4) \cup \{frac92\} \cup [5,6]1cup([7,8] \cap \mathbb{Q})$$

Determinare $\overline{A}$, $\overline{A^c}$, $(\overline{A})^c$, A^c, $Int(A)$, $Int(A^c)$, $\overline{Int(A)}$, $\overline{Int(A^c)}$ e $Int(\overline{A})$.

(Componendo opportunamente le operazioni di interno, chiusura e complementare si possono trovare fino a 14 insiemi distinti... Provare per credere!)

ESERCIZIO 8 Si consideri la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{T} := \{U \subset \mathbb{R} \mid 0 \notin U \text{ oppure } \mathbb{R} \setminus U \text{ è finito}\}$$

(a) Si verifichi che $\mathcal{T}$ è una topologia per $\mathbb{R}$;
(b) Si determinino tutti i numeri reali x tali che $\{x\}$ è clopen in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$;
(c) Si dica se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è di Hausdorff e se ammette base numerabile.