Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2015/2016

GE220 - Geometria 3 - Tutorato III

DOCENTE: PROF. MASSIMILIANO PONTECORVO

TUTORI: A. GALOPPINI, M. BRUNO

<u>ESERCIZIO 0</u> Sia (X, d) uno spazio metrico. Si verifichi che l'applicazione

$$\epsilon : X \times X \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto \min\{1, d(x, y)\}$$

è una distanza su X.

<u>ESERCIZIO 1</u> Siano X, Y spazi topologici, C chiuso in X e D chiuso in Y. Si verifichi che $C \times D$ è chiuso in $X \times Y$.

<u>ESERCIZIO 2</u> Sia X un insieme infinito.Si considerino i seguenti sottinsiemi di $\mathcal{P}(X)$ e, per ciascuno di essi, si dica se è una topologia o una base per una topologia. Nel caso in cui sia una delle due, si dica se la topologia che definisce su X è di Hausdorff:

(a) $\mathcal{S}_a = \{F \subset X : |F| < \infty\} \cup \{X\}$

(b) $\mathcal{S}_b = \{G \subset X : |G| = \infty\} \cup \{\emptyset\}$

(c) $\mathcal{S}_c = \{H \subset X : |X \smallsetminus F| = \infty\} \cup \{X\}$

(d) Fissato un punto x, sia $\mathcal{S}_d = \{K \subset X : x \in K\} \cup \{\emptyset\}$

<u>ESERCIZIO 3</u> Sia X uno spazio topologico, si consideri il prodotto cartesiano $X \times X$ e la sua diagonale $\Delta_X \subset X \times X$ data da $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$. Si consideri la proiezione sul primo fattore

$$p_X : X \times X \to X \qquad (x, y) \mapsto x$$

Si consideri inoltre la seguente topologia su $X \times X$:

$$\mathcal{T} := \{U \subset X \times X : p_X(U \cap \Delta_X) \text{ è aperto in } X\}$$

Si dimostri che p_X è aperta rispetto a $\mathcal{T}$ se e solo se X ha la topologia discreta.

<u>ESERCIZIO 4</u> Sia (X, d) uno spazio metrico e si consideri la seguente funzione d''

$$d''(x, y) = d(x, y)^2$$

per ogni $(x, y) \in X \times X$.

(a) Si dia un esempio di (X, d) per il quale d'' è una distanza, e un esempio per cui non lo è.

(b) Si mostri che se d'' è una distanza, induce la stessa topologia di d.

<u>ESERCIZIO 5</u> Sia $f : X \to Y$ un omeomorfismo locale. Dimostrare che se Y è separabile e ogni fibra di f è al più numerabile, allora X è separabile.

<u>ESERCIZIO 6</u> Se X è uno spazio topologico e $Z \subset X$, denotiamo con Z' l'insieme dei punti di accumulazione di Z. Sia $f : X \to Y$ una funzione continua e iniettiva.

(a) Si dimostri che $f(Z') \subset f(Z)'$.

(b) Si dica se (a) vale per una f continua ma non iniettiva.

<u>Esercizio 7</u> Si consideri la seguente topologia su $\mathbb{R}$

$$\mathcal{T} := \{Y \subset \mathbb{R} : Y \cap \mathbb{N} = \emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$$

(a) Si confronti, se possibile, la topologia euclidea con $\mathcal{T}$.
(b) Si dica se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è di Hausdorff.
(c) Si dica se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è N_2.
(d) Si dimostri che ogni successione in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ ha infiniti limiti.
(e) Si determinino esplicitamente tutti i limiti della successione $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ definita come

$$x_n := \begin{cases} n & \text{se } n \leq 2015 \\ \frac{1}{2} & \text{se } n \geq 2016 \end{cases}$$