Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2015/2016

GE220 - Geometria 3 - Tutorato IV

DOCENTE: PROF. MASSIMILIANO PONTECORVO

TUTORI: A. GALOPPINI, M. BRUNO

ESERCIZIO 0 Descrivere le topologie indotte su $\mathbb{Z}$ come sottospazio topologico di $\mathbb{R}$ dotato delle seguenti topologie:
(a) $\mathcal{E}$;
(b) $\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{X\}$;
(c) $\{(-r, r) : r \in \mathbb{R}^+\} \cup \{\emptyset\} \cup \{X\}$.

ESERCIZIO 1 Siano X, Y spazi topologici e sia $q : X \to Y$ un'applicazione. Dato $U \subset X$, mostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
(a) U è saturo, ossia $q^{-1}(q(U)) = U$;
(b) U è unione di fibre;
(c) Se $x \in U$, allora ogni punto $x' \in X$ tc $q(x') = q(x)$ sta in U.

ESERCIZIO 2 Sia X uno spazio topologico. Si dimostri che X è di Hausdorff se e solo se $\Delta(X) = \{(x, x) : x \in X\}$ è chiuso in $X \times X$.

ESERCIZIO 3 Dimostrare che il quoziente di uno spazio separabile è separabile.

ESERCIZIO 4 Data la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}$ definita come $x \rho y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$, si dimostri che $(\mathbb{R}, \mathcal{E})/\rho$ è omeomorfo a S^1.

ESERCIZIO 5 Sia X uno spazio topologico, sia D un insieme denso in X. Descrivere la topologia quoziente sullo spazio X/D.

ESERCIZIO 6 Sia X un insieme, e sia ρ una relazione di equivalenza su X. Sia $\mathcal{B} := \{A_x\}_{x \in X}$, ove $A_x := \{y \in X \mid x \rho y\}$.
(a) Dimostrare che $\mathcal{B} \cup \{\emptyset\}$ è base per una topologia $\mathcal{T}$ su X (detta *"Topoogia di Partizione"*);
(b) Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione a termini in X convergente a x con la topologia di partizione. Cos'altro si può dire sulla sua convergenza in $(X, \mathcal{T})$?
(c) Dare delle condizioni necessarie e sufficienti su X e ρ affinchè X dotato della topologia di partizione sia separabile;
(d) Descrivere lo spazio quoziente X/ρ dotato dell'usuale topologia quoziente indotta da $\mathcal{T}$.

ESERCIZIO 7 Si consideri $\mathbb{R}$ dotato della topologia cofinita $\mathcal{C}$. Sia $A := \{x_1, ..., x_n\}$ sottoinsieme finito di $\mathbb{R}$, e sia $X := \mathbb{R}/\rho$, ove $x \rho y \iff x = y$ oppure $x, y \in A$.
(a) Dimostrare che la topologia quoziente su X è la topologia cofinita;
(b) Dimostrare che se $A = \mathbb{Z}$ allora X non ha la topologia cofinita;