Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2015/2016

GE220 - Geometria 3 - Tutorato VI

Docente: Prof. Massimiliano Pontecorvo

Tutori: A. Galoppini, M. Bruno

Nota: in questo tutorato assumeremo che un *cammino* tra due punti x e y di uno spazio X è una funzione f continua da $[0,1]$ in X tale che $f(0)=x, f(1)=y$, e che un *arco* tra x e y è un cammino iniettivo.

Esercizio 0 Siano $p, q \in \mathbb{R}^2$ i punti di coordinate $(1,0)$ e $(-1,0)$ rispettivamente. Stabilire quali dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}$ sono connessi o connessi per cammini.
(a) $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \| x-p \| < 1 \vee \| x-q \| < 1\}$;
(b) $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \| x-p \| < 1 \vee \| x-q \| \leq 1\}$;
(c) $C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \| x-p \| \leq 1 \vee \| x-q \| \leq 1\}$;

Esercizio 1 Dimostrare che i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$ non sono omeomorfi:
$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1 \wedge y \leq 0\}$;
$Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-1)^2=1\}$;

Esercizio 2 Un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ si dice stellato rispetto ad un punto $a \in A$ se per ogni $b \in A$ il segmento che unisce a e b è interamente contenuto in A. Dimostrare che gli insiemi stellati sono connessi per archi.

Esercizio 3 Siano A,B sottospazi di uno spazio topologico X tali che $A \cup B$ e $A \cap B$ siano connessi. Provare che se A eB sono entrambi aperti o entrambi chiusi in X allora anch'essi sono connessi.

Esercizio 4 Si consideri $\mathbb{R}$ munito della topologia euclidea, e sia $Y = \{0,1\}$ dotato della topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, Y\}$ (detto spazio di Sierpinski). Sia $X = \mathbb{R} \times Y$ munito della topologia prodotto. Si dica se X è connesso per cammini *(Suggerimento: il prodotto di spazi connessi per cammini è connesso per cammini).*
Y è anche connesso per archi?

Esercizio 5 Uno spazio X si dice *totalmente sconnesso* se l'insieme delle sue componenti connesse è $\{\{x\} \mid x \in X\}$.
(a) Si consideri $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea e $\mathbb{Q}$ sottospazio di $\mathbb{R}$. Descrivere le componenti connesse di $\mathbb{Q}$ e dedurne che, in generale, le componenti connesse in uno spazio topologico non sono aperte.
(b) Più in generale, provare che uno spazio metrizzabile numerabile con almeno due punti è totalmente sconnesso.
(c) Si dimostri che la retta di Sorgenfrey è totalmente sconnessa.

Esercizio 6 Dimostrare o confutare la seguente asserzione: presa comunque una famiglia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di sottospazi connessi per archi di uno spazio topologico X tale che $A_{n+1} \subset A_n \forall n \in \mathbb{N}$, allora $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ è connesso per archi.

ESERCIZIO 7 Uno spazio topologico X si dice *ultraconnesso* se presi comunque due chiusi non vuoti la loro intersezione è non vuota. X è invece *iperconnesso* se presi comunque due aperti non vuoti la loro intersezione è non vuota.
(a) Dare un esempio di spazio iperconnesso che non sia ultraconnesso;
(b) Dare un esempio di spazio ultraconnesso che non sia iperconnesso;
(c) Mostrare che uno spazio ultraconnesso è anche connesso per cammini, mentre uno spazio iperconnesso non lo è necessariamente *(Suggerimento: presi x e y, costruire un cammino la cui immagine è costituita da x, y e un opportuno punto p. Per la seconda parte, considerare un insieme numerabile dotato della topologia cofinita, dando per buono che [0,1] non può essere scritto come unione numerabile di chiusi propri disgiunti).*
(d) Possono esistere spazi ultraconnessi che non siano connessi per archi?