Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2015/2016
GE220 - Geometria 3 - Tutorato VII

Docente: Prof. Massimiliano Pontecorvo
Tutori: A. Galoppini, M. Bruno

Esercizio 0 Sia X uno spazio topologico compatto. Dimostrare che se $A \subset X$ è chiuso e discreto (cioè la topologia di sottospazio su A è la discreta), allora A è finito.

Esercizio 1 Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$:
$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
$Y = \mathbb{R}^2 - S^1$
Dimostrare che X è compatto in $(\mathbb{R}^2, \epsilon)$, e che $X \cap Y$ è chiuso e limitato ma non compatto in Y (dotato della topologia di sottospazio).

Esercizio 2 Si dimostri che $X = [a, b] \cap \mathbb{Q}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ non è compatto. Fissati a piacere $a, b \in \mathbb{R}$ si trovi una successione in X che non ammetta una sottosuccessione convergente.

Esercizio 3 Dimostrare che una funzione continua da un compatto a un Hausdorff è chiusa.

Esercizio 4 Si consideri, in $\mathbb{R}$, la famiglia di insiemi $\mathcal{T} := \{\mathbb{R} - K\} \cup \{\emptyset\}$ al variare di K compatto in $(\mathbb{R}, \epsilon)$.
(a) Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su $\mathbb{R}$;
(b) Calcolare la chiusura dell'insieme $[0, +\infty)$;
(c) Dire se la successione $\{(-2)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, e se si dire a cosa converge;
(d) Stabilire se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è connesso e/o compatto.

Esercizio 5 Dire se può esistere uno spazio topologico totalmente sconnesso e localmente connesso.

Esercizio 6 Sia X un insieme e S,$\mathcal{T}$ due topologie per esso, con $S < \mathcal{T}$. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:
(a) $(X, \mathcal{T})$ compatto $\Rightarrow$ (X, S) compatto.
(b) (X, S) compatto $\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T})$ compatto.

Esercizio 7 Dimostrare che non esistono funzioni continue iniettive da S^1 a $\mathbb{R}$.

Esercizio 8 Sia X compatto infinito, e sia A un suo sottoinsieme infinito numerabile.
(a) Dimostrare che A ha almeno un punto di accumulazione, specificando perchè l'ipotesi "X infinito" è necessaria;
(b) Dire se è possibile dedurre dal punto precedente che ogni successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ che assume infiniti valori distinti converge (in caso contrario, esibire un controesempio).

Esercizio 9 Stabilire se $[0, 1]$ è compatto nella retta di Sorgenfrey;
($\frac{\star}{4}$) Dimostrare che un compatto nella retta di Sorgenfrey è al più numerabile;
($\frac{\star}{2}$) Caratterizzare i compatti nella retta di Sorgenfrey.