Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2015/2016

GE220 - Geometria 3 - Tutorato VIII

DOCENTE: PROF. MASSIMILIANO PONTECORVO

TUTORI: A. GALOPPINI, M. BRUNO

ESERCIZIO 0 Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico. Si consideri la sua compattificazione di Alexandroff $(X^\infty, \mathcal{T}^\infty)$ definita come:
$X^\infty = X \cup \{\infty\}$;
$\mathcal{T}^\infty = \mathcal{T} \cup \{U \cup \{\infty\} \mid X \setminus U$ è chiuso e compatto in $X\}$.
(a) Si dimostri che $(X^\infty, \mathcal{T}^\infty)$ è uno spazio topologico compatto.
(b) Si dimostri che l'inclusione $i : X \to X^\infty$ è un'immersione topologica aperta;
(c) Si descriva esplicitamente un omeomorfismo da $\mathbb{R}^\infty$ a S^1.

ESERCIZIO 1 Siano X,Y e Z spazi topologici e siano date quattro applicazioni continue $f_0, f_1 : X \to Y$, $g_0, g_1 : Y \to Z$. Mostrare che se f_0 è omotopa a f_1 e g_0 è omotopa a g_1 allora $g_0 \circ f_0$ è omotopa a $g_1 \circ f_1$.

ESERCIZIO 2 Sia $Y \subset \mathbb{R}^2$ un sottospazio convesso. Mostrare che, per qualsiasi spazio topologico X, due qualsiasi applicazioni continue $f, g : X \to Y$ sono omotope.

ESERCIZIO 3 Siano $f, g : S^n \longrightarrow S^n$ due mappe continue tali che $f(x) \neq -g(x)\ \forall x \in S^n$. Dimostrare che sono omotope.

ESERCIZIO 4 Sia $f : S^n \longrightarrow S^n$ l'applicazione antipodale, ossia $f(x) = -x$. Mostrare che se $n = 2k - 1$ è dispari, f è omotopa all'identità su S^n.
(Suggerimento: pensare S^n come $\{x \in \mathbb{C}^k \mid ||x|| = 1\}$)

ESERCIZIO 5 In $\mathbb{R}^2$, si consideri lo spazio $B = B_{0,1}$ (Broom space) formato dall'unione dei segmenti con estremi i punti $(1, 1/n)$ e l'origine, e il segmento $(\frac{1}{2}, 1]$ sull'asse x.
(a) Calcolarne la chiusura $\overline{B}$;
(b) Dimostrare che B è connesso;
(c) Dimostrare che né B né $\overline{B}$ sono localmente connessi;
(d) Dire se B è connesso per cammini;
(e) Sia $B_{\frac{1}{m+1},\frac{1}{m}}$ il Broom formato dall'unione dei segmenti di lunghezza $\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$ con un estremo nel punto $(\frac{1}{m}, 0)$, che formano un angolo di $\pi - \frac{1}{n}$ (in radianti) con l'asse x al variare di $n \in \mathbb{N}$, e il segmento $[\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}]$ sull'asse x. Si consideri $M = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_{\frac{1}{m+1},\frac{1}{m}}$. Mostrare che $(0, 0)$ ammette una base di intorni le cui chiusure sono connesse. Si può concludere che M è localmente connesso in $(0, 0)$?