

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2015/2016
GE220 - Geometria 3 - Tutorato VIII

DOCENTE: PROF. MASSIMILIANO PONTECORVO

TUTORI: A. GALOPPINI, M. BRUNO

ESERCIZIO 0 Siano $\phi : X \rightarrow Y$, $\psi : Y \rightarrow Z$ due applicazioni continue tali che $\phi(x_0) = y_0$ e $\psi(y_0) = z_0$ allora $(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*$.

ESERCIZIO 1 Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ convesso. Dato $x \in X$, si dimostri che $\pi_1(X, x) = 0$.

ESERCIZIO 2 Siano X uno spazio topologico, $Y \subset X$, $y_0 \in Y$ e $i : Y \rightarrow X$ l'inclusione. Mostrare che, in generale, $i_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, y_0)$ può non essere un omomorfismo iniettivo.

ESERCIZIO 3 Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia C_n la circonferenza di centro $(\frac{1}{n}, 0)$ e raggio $\frac{1}{n}$. Si consideri $H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$, detto "orecchino hawaiano". Si dimostri che è compatto.

ESERCIZIO 4 Sia C_n la circonferenza di centro l'origine e raggio $\frac{1}{n}$ e $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Si dica se:

- (a) X è connesso/connesso per archi;
- (b) X è compatto;
- (c) $X \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\}$ è connesso/connesso per archi e compatto.

ESERCIZIO 5 Si consideri il seguente sottospazio di \mathbb{R}^2 :

$$B = (\{0\} \times (0, 1]) \cup ((0, 1] \times \{0\}) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \left(\frac{1}{n}, y\right) : 0 < y \leq 1 \right\}\right)$$

Mostrare che è connesso ma non connesso per archi.

ESERCIZIO 6 Si dimostri che $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$ è connesso per archi per $n > 1$ (Cominciare con il caso $n = 2$).