GE220 - Topologia Generale e Algebrica
Dip. Matematica - Università Roma Tre

M. Pontecorvo - V. Talamanca

Compito - 12 aprile 2016

Istruzioni. Scrivere nome, cognome, numero di matricola e firma su ogni foglio che si intende consegnare. Scrivere solamente sui fogli forniti. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici. **NON PARLARE** e metter via i cellulari pena il ritiro del compito.
Rispondere alle domande giustificando attentamente le risposte.

Punteggio totale 100 punti.

1. Nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ consideriamo la seguente famiglia di sottoinsiemi

$$\mathcal{S}_- = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$$

   (a) **(5 punti).** Dimostrare che $\mathcal{S}_-$ è una topologia su $\mathbb{R}$ (detta anche topologia della semi-continuità superiore).

   (b) **(15 punti).** Definire (senza dimostrazione) anche la topologia cofinita $\mathcal{C}$ e la topologia Euclidea $\mathcal{E}$ su $\mathbb{R}$ e considerare le seguenti applicazioni tra spazi topologici:

$$f : (\mathbb{R}, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{S}_-) \quad \text{data da } x \mapsto x$$

$$g : (\mathbb{R}, \mathcal{C}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{E}) \quad \text{data da } x \mapsto x$$

$$h : (\mathbb{R}, \mathcal{S}_-) \to (\mathbb{R}, \mathcal{C}) \quad \text{data da } x \mapsto x$$

   Dimostrare se f, g e h sono continue e/o aperte.

Girare, prego →

2. Consideriamo la curva piana (cioè un'applicazione da un intervallo di $\mathbb{R}$ a valori nel piano) data da $\gamma : (-\infty, 5) \to \mathbb{R}^2$ definita a tratti come segue:

$$\gamma(t) = \begin{cases} (0,t) \in \mathbb{R}^2 & \text{se } t \in (-\infty, 0) \subset \mathbb{R} \\ (t,0) \in \mathbb{R}^2 & \text{se } t \in [0,2) \subset \mathbb{R} \\ (2, 2-t) \in \mathbb{R}^2 & \text{se } t \in [2,3) \subset \mathbb{R} \\ (5-t, -1) \in \mathbb{R}^2 & \text{se } t \in [3,5) \subset \mathbb{R} \end{cases}$$

(a) **(5 punti).** Fare un disegno della *traccia* Γ di γ cioè del sottoinsieme $\Gamma := Im(\gamma) \subset \mathbb{R}^2$.

(b) Considerare l'applicazione (automaticamente suriettiva) $\gamma : (-\infty, 5) \to \Gamma$ dove sia il dominio che l'immagine sono dotati della topologia di sottospazio Euclideo. Dopo aver descritto il tipico aperto di Γ, rispondere alle seguenti domande.

i. **(5 punti).** $\gamma : (-\infty, 5) \to \Gamma$ è un'applicazione iniettiva ?

ii. **(5 punti).** $\gamma : (-\infty, 5) \to \Gamma$ è un'applicazione continua ?

iii. **(5 punti).** $\gamma : (-\infty, 5) \to \Gamma$ è un'applicazione aperta ?

iv. **(5 punti).** $\gamma : (-\infty, 5) \to \Gamma$ è un omeomorfismo locale ?

v. **(5 punti).** $\gamma : (-\infty, 5) \to \Gamma$ è un omeomorfismo ?

3. Consideriamo l'azione di $\mathbb{Z}^2$ su $\mathbb{R}^2$ per traslazione:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \big((n,\, m),\, (x,\, y)\big) &\longmapsto (x+n,\, y+m) \end{aligned}$$

a) **(10 punti).** Descrivere l'orbita del punto $i = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$.

b) **(10 punti).** Dato $P = (\sqrt{2}, \sqrt{3}) \in \mathbb{R}^2$ quanti sono i punti dell'orbita di P contenuti nel quadrato di vertici $A = (0,\, \frac{3}{2})$, $B = (0,\, -\frac{3}{2})$, $C = (\frac{3}{2},\, 0)$, $D = (-\frac{3}{2},\, 0)$?

c) **(10 punti).** Dimostrare che ogni orbita ha uno ed un solo punto nell'insieme $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; 0 \le x < 1,\, 0 \le y < 1\}$.

d) **(10 punti).** Dimostrare che il quadrato $D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1\}$ è un dominio fondamentale per l'azione di $\mathbb{Z}^2$ su $\mathbb{R}^2$.

e) **(10 punti).** Data la retta r di equazione $y = \lambda x$, dimostrare che esiste un'orbita che interseca r in almeno due punti distinti se e soltanto se $\lambda \in \mathbb{Q}$.