GE220 - Topologia Generale e Algebrica
Dip. Matematica - Università Roma Tre

M. Pontecorvo - V. Talamanca

Compito - 1 giugno 2016

Istruzioni. Scrivere nome, cognome, numero di matricola e firma su ogni foglio che si intende consegnare. Scrivere solamente sui fogli forniti. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici. **NON PARLARE** e metter via i cellulari pena il ritiro del compito.
Rispondere alle domande giustificando attentamente le risposte.

Punteggio totale 100 punti.

1. Indichiamo con $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.c. } |z| \leq 1\}$ il disco chiuso unitario dotato della topologia Euclidea e con S^1 il sottospazio topologico $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.c. } |z| = 1\}$. Sia $h : \bar{D} \to \bar{D}$ un qualunque omeomorfismo.
   (a) **(10 punti).** Usare il gruppo fondamentale per dimostrare che $h(S^1) \subset S^1$.
   (b) **(15 punti).** Dimostrare che infatti la restrizione di h a S^1 è un omeomorfismo sull'immagine e trovare l'immagine.

2. **(15 punti).** Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita su un intervallo. Calcolare il gruppo fondamentale del sottospazio topologico $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq f(x)\}$.
   [Suggerimento: considerare la straight line homotopy $(x, y, t) \mapsto (x, ty + (1 - t)f(x))$ giustificando bene e elaborando tutti i passaggi.]

3. **(10 punti).** Dimostrare che non esistono rivestimenti di S^1 con gruppo fondamentale finito ma non-banale.

4. **(10 punti).** Uno spazio topologico è localmente compatto se ogni punto ammette un intorno la cui chiusura è un compatto. Dimostare che ogni varietà topologica è localmente compatta.

5. Sia X uno spazio topologico e indichiamo con τ la sua topologia. Definiamo un nuovo spazio topologico $(\hat{X}, \hat{\tau})$ detto one-point compactification (o compattificazione di Alexandrov) ponendo:

$$\hat{X} = X \cup \{\infty\} \quad \text{con topologia} \quad \hat{\tau} = \tau \cup \{U \cup \{\infty\} \text{ t.c. } X \setminus U \text{ è un compatto di } \tau\}$$

   (a) **(10 punti).** Si dimostri che l'inclusione $i : X \to \hat{X}$ è sempre un embedding.

   (b) **(15 punti).** Si dimostri che X varietà topologica connessa e non-compatta implica che $\hat{X}$ è compatto, connesso e di Hausdorff.

   (c) **(15 punti).** Trovare $\hat{\mathbb{C}}$ e $\hat{S}^1$.