GE220 - Topologia Generale e Algebrica
Dip. Matematica - Università Roma Tre

M. Pontecorvo - V. Talamanca

Compito - 15 settembre 2016

Istruzioni. Scrivere nome, cognome, numero di matricola e firma su ogni foglio che si intende consegnare. Scrivere solamente sui fogli forniti. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici. **NON PARLARE** e metter via i cellulari pena il ritiro del compito.
Rispondere alle domande giustificando attentamente le risposte.

Punteggio totale 100 punti.

1. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $x \mapsto x^2$. Denotiamo con $\mathcal{E}$ la topologia Euclidea e con $\mathcal{S}_+$ la topologia della semicontinuità inferiore, che come già visto è generata da $\{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$

   (a) **(5 punti).** Se entrambe le copie di $\mathbb{R}$ sono dotate della topologia Euclidea
   f è continua ? f è aperta ?

   (b) **(15 punti).**
   Se entrambe le copie di $\mathbb{R}$ sono dotate della topologia della semicontinuità inferiore
   f è continua ? f è aperta ?

2. Siano γ_1 e γ_2 due curve a valori nel quadrato $Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ e definite nello stesso intervallo $I := \{t \in \mathbb{R} \mid -\pi \leq t \leq \pi\}$. Cioè per ciascun $i = 1, 2$; $\gamma_i : I \to Q$ è un'applicazione continua e denotiamo con $\Gamma_i = \gamma_i(I)$ la sua traccia.

   (30 punti). Se valgono le seguenti proprietà:

$$\gamma_1(-\pi) = (0, 1) \qquad \gamma_1(\pi) = (1, 0)$$
$$\gamma_2(-\pi) = (0, 0) \qquad \gamma_2(\pi) = (1, 1)$$

   dimostrare rigorosamente che l'insieme $\Gamma := \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ è un sottoinsieme connesso del piano $\mathbb{R}^2$.

Girare, prego →

3. Consideriamo $\mathbb{R}[t]$ l'anello dei polinomi in una variabile a coefficienti reali, con tipico elemento $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$ con $a_i \in \mathbb{R}$.

   Dato un sottoinsieme *finito* di polinomi $S \subset \mathbb{R}[t]$ consideriamo l'insieme dei loro "zeri" e poniamo $Z(S) := \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) = 0, \quad \forall P(t) \in S\}$.

   (a) **(10 punti).** Individuare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

      i. $Z(\emptyset) =$

      ii. $Z(t^2 - 16) =$

   (b) La *topologia di Zarisky* su $\mathbb{R}$ è definita (come abbiamo già visto) considerando la seguente famiglia di sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{R}$: $\mathcal{C} := \{Z(S) \mid S \subset \mathbb{R}[t]\}$.

      (20 punti). Fornire la nozione di base per una topologia e dimostrare che i sottoinsiemi del tipo $D(P) = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) \neq 0\}$ - dove $P \in \mathbb{R}[t]$ è un *singolo* polinomio - costituiscono una base per gli aperti della topologia di Zarisky.

4. **(20 punti).** Nell'ambito della teoria dei rivestimenti, fornire un enunciato accurato del teorema di sollevamento delle applicazioni.