Matematica - Roma Tre

GE310 - Istituzioni di Geometria Superiore - Prof. M.Pontecorvo

CONSEGNARE (A GRUPPI DI 3) GLI ESERCIZI N. 1,3,6,12,16,17 IL GIORNO 31 OTTOBRE 2018.

1. Dimostare che gli unici sottospazi di $\mathbb{R}$ che siano varietà connesse di dimensione positiva sono gli intervalli aperti i quali sono tutti omeomorfi a $\mathbb{R}$ stesso.

2. Definire $\mathbb{RP}^1$ e dimostrare che è una 1-varietà topologica. Classificarla.

3. Definire $\mathbb{RP}^2$ e dimostrare che è una 2-varietà topologica scrivendola come poligono a identificazione.

4. Disegnare una triangolazione del Nastro di Möbius M e dimostarre che è non-orientabile. Calcolare $\chi(M)$.

5. Calcolare la caratteristica di Eulero del disco aperto esibendo una sua triangolazione. Calcolare poi la caratteristica di Eulero del disco chiuso esibendo una sua triangolazione.

6. Calcolare la caratteristica di Eulero dei seguenti sottoinsiemi del piano. Stabilire e dimostrare quali sono omeomorfi o non-omeomorfi tra loro. Esibire tutti gli omeomorfismi.

   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$

   (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$

   (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 < 2\}$

   (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\}$

7. Suddividendo in due triangoli ciascun quadrato del cubo si ottiene una triangolazione della sfera S^2. Calcolare la caratteristica di Eulero di questa particolare triangolazione. Questa particolare triangolazione è orientabile? La sfera è una superficie orientabile?

8. Una triangolazione si dice *minimale* se ogni suo vertice è connesso a ogni altro vertice mediante un lato.

   (a) Il cubo fornisce una triangolazione minimale della sfera ?

   (b) E il tetraedro?

   (c) Dimostrare che in ogni triangolazione minimale $2l = v(v - 1)$.

9. Esibire una triangolazione del piano proiettivo. È *minimale* ? Spiegare perchè questa particolare triangolazione è non-orientabile e calcolarne la caratteristica di Eulero.

Girare, prego →

10. 5-6. di p.114 del libro di J.Lee.
11. 5-11. di p.115 del libro di J.Lee.
12. 6-1. solo parti (a), (b) e (c) di p.146 del libro di J.Lee. (Attenzione: in (c) il poligono NON è connesso ma è unione di triangoli da cucire secondo le etichette.)
13. 6-2. di p.146 del libro di J.Lee.
14. 6-3. di p.146 del libro di J.Lee.
15. 6-4. di p.146 del libro di J.Lee.
16. Esibire esplicitamente un poligono etichettato convesso i cui vertici abbiano più di un rappresentante nella topologia quoziente.
17. Esercizio sulla "Trattrice", n.4 della sezione 1-3 del Do Carmo (a pagina 7 della prima edizione). **a.** , **b.** (cane che tira il guinzaglio mentre il padrone passeggia lungo un rettilineo).

    a′. α è una curva liscia, perchè?

    c. Calcolare la lunghezza della trattrice nell'intervallo $t \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$.

    d. Dire se esiste la retta tangente in $t = \frac{\pi}{2}$.

    e. Trovare i valori di t dove non esiste il versore tangente $\frac{\dot{\alpha}}{|\dot{\alpha}|}$