Matematica - Roma Tre
GE310 - Istituzioni di Geometria Superiore - Prof. M.Pontecorvo

CONSEGNARE A GRUPPI, IL GIORNO 5 DICEMBRE 2018

1. Caratterizzare geometricamente i punti critici della funzione altrzza-con-segno dal piano orizzontale $\{z = 0\}$ su una superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ usando – diversamente da quanto visto a lezione – coordinate locali $\mathbf{x} : U \to \Sigma$.

2. La superficie di Scherk è la superficie di tipo grafico $S \subset \mathbb{R}^3$ data da

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = \ln \left(\frac{\cos x}{\cos y} \right), \ (x, y) \in A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \subset \mathbb{R}^2 \right\}$$

   Trovare i punti in cui il piano tangente è orizzontale.

3. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$S_a := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = a + z^2\}$$

   è una superficie regolare? Queste superfici sono di rotazione? Giustificare attentamente la risposta e disegnare S_a per almeno un valore del parametro a.

4. Per ciascuna delle seguenti applicazioni $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ trovare un aperto massimale $U \subset \mathbb{R}^2$ tale che $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^2$ sia carta locale (parametrizzazione) di una superficie regolare.
   - (6.1) $X(u, v) = (u, uv, v)$
   - (6.2) $X(u, v) = (u^2, u^3, v)$
   - (6.3) $X(u, v) = (u, u^2, v + v^3)$

5. Do Carmo, p.65 (Sec 2-2) es. 4 ; p.80 (Sec. 2-3) es. 7. (Le pagine si riferiscono alla prima edizione.)

6. Si consideri l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} \overline{\mathbf{x}} : & [-\pi, \pi] \times (-1, 1) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & \left(\left(2 + v \cos \frac{u}{2}\right) \cos u, \left(2 + v \cos \frac{u}{2}\right) \sin u, v \sin \frac{u}{2} \right) \end{array}$$

   (a) Dimostrare che $U = (-\pi, \pi) \times (-1, 1)$ è aperto massimale su cui $\overline{x}$ è iniettiva; d'ora in avanti indicheremo con $\mathbf{x}$ la restrizione a U. (*Suggerimento.* Può essere utile scrivere $\overline{\mathbf{x}} = (x, y, z)$ e considerare *anche* la funzione $x^2 + y^2$.)

   (b) Usare liberamente il risultato del punto precedente e la teoria sviluppata per le superfici topologiche per dimostrare che l'immagine $Im(\overline{x})$ è una superficie topologica $M \subset \mathbb{R}^3$, omeomorfa a un nastro di Möbius e discutere la sua orientabilità in termini di poligoni a identificazione.

   (c) Dimostrare che $\mathbf{x}$ è carta locale su M, usando anche il risultato del punto precedente che garantisce la continuità dell'inversa. Ricoprendo M con due carte locali di "tipo $\mathbf{x}$" si ha quindi che M è superficie regolare in $\mathbb{R}^3$.

   (d) Scrivere l'applicazione di Gauss N sulla carta locale $\mathbf{x}$, ristretta al cerchio equatoriale $\{v = 0\}$, e usarla per dimostrare che M è infatti una superficie regolare non-orientabile.

7. (Algebra lineare). Dimostrare che sono ben definiti la traccia e il determinante di un operatore lineare $L : V \to V$ su uno spazio vettoriale di dimensione finita.