Matematica - Roma Tre

GE310 - Istituzioni di Geometria Superiore - Prof. M.Pontecorvo

CONSEGNARE IL GIORNO 19 DICEMBRE 2018.

1. *Scelta dei segni nella definizione di Curvatura*

   A differenza del libro di testo poniamo

   $$dN =: \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

   per la scelta del segno degli autovalori $k_1 \leq k_2$ della curvatura che essendo un operatore autoaggiunto è sempre diagonalizzabile.

   Definiamo poi la seconda forma fondamentale

   $$II_{ff}(X) := +\langle (dN)X, X \rangle$$

   e la curvatura normale di una curva parametrizzata per ascissa curvilinea su una superficie orientata

   $$k_n(\gamma) := -\langle \ddot{\gamma}, N \rangle$$

   (a) Prendere coordinate geografiche sulla sfera standard $\mathbf{x}(u, v) = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v)$; dopo aver calcolato N, verificare l'equazione matriciale

   $$dN = +II \cdot I^{-1}$$

   e esibire le curvature principali.

   (b) Usando le definizioni date sopra, verificare se per l'equatore della sfera vale l'equazione $k_n(\gamma) = \langle dN\dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle$ e calcolare anche la curvatura normale del parallelo che passa per Milano (latitudine 45^0 Nord) usando la definizione.

   (c) Dimostrare in generale, che $k_n(\gamma(s))$ coincide con $II_{ff}(\dot{\gamma}(s))$, quindi rispetto a una base ortonormale di autovalori di dN avremo $k_n = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$ cioè in ogni punto $p \in \Sigma$ le curvature principale k_1 e k_2 sono il minimo e il massimo tra tutte le curvature normali.

   (d) Calcolare la curvatura normale del cerchio standard $z = 0 = 1 - x^2 - y^2$ sul cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e poi sul piano $z = 0$; osservare infine che la sfera e il cilindro sono tangenti - hanno cioè lo stesso piano tangente - lungo ciascun punto del cerchio standard. Spiegare l'influenza di questa osservazione sul calcolo delle rispettive curvature normali.

2. Dimostrare che ogni superficie è localmente orientabile e ammette localmente due orientazioni. Dimostrare che la curvatura di Gauss - e quindi anche la nozione di punto ellittico, iperbolico etc. - non dipende dalla scelta dell'orientazione. In particolare queste nozioni rimangono valide anche per superfici non-orientabili e non dipendono dal segno usato nella definizione di dN. Cosa succede invece per le curvature principali e per la curvatura Media?

Girare, prego →

3. *Direzioni principali e direzioni asintotiche.* Sia Σ una superficie in $\mathbb{R}^3$ e sia $v \in S^1 \subset T_p\Sigma$ un versore tangente in $p \in \Sigma$. Possiamo scrivere $v = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$ con e_1, e_2 base ortonormale di $T_p\Sigma$ nonché direzioni principali nel punto p. Per il Teorema Spettrale infatti l'operatore autoaggiunto dN ha sempre due autovalori reali $k_1 \leq k_2$ con autovettori e_1, e_2.

   Abbiamo visto a lezione che la curvatura normale k_n di una curva $\gamma(s) \subset \Sigma$ con $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = v$ dipende solo dalla direzione di $\dot{\gamma}$. Nel punto p, $k_n(\gamma) = k_n(\theta) = k_n(-\theta)$ coincide con la seconda forma fondamentale ristretta al cerchio dei versori tangenti e quindi si ottiene la seguente funzione di una variabile, periodica di periodo π:

$$\begin{array}{rccc} k_n : & [0,\pi) & \longrightarrow & [k_1, k_2] \\ & \theta & \longmapsto & k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta \end{array}$$

   I punti di max e min sono le *direzioni principali* mentre gli zeri di k_n (cioè le direzioni in cui la curvatura normale si annulla) sono detti *direzioni asintotiche.* Dopo aver tracciato un grafico qualitativo della funzione $k_n(\theta)$, dimostrare che nel punto $p \in \Sigma$ si hanno:

   (a) Zero direzioni asintotiche se e solo se il punto p è ellittico

   (b) Esattamente una direzione asintotica se e solo se il punto è parabolico

   (c) Esattamente due direzioni asintotiche se e solo se il punto è iperbolico

   (d) Tre direzioni asintotiche se e solo se infinite direzioni asintotiche se e solo se il punto è planare

4. Cercare sul libro di testo una parametrizzazione - coordinate locali - per ciascuna delle seguenti superfici regolari e calcolarne la curvatura - a mano, e/o con Mathematica

$$dN = II \cdot I^{-1}$$

   trovare cioè la matrice 2×2 che rappresenta la curvatura rispetto alla base del piano tangente in quelle coordinate. Per ciascuna superficie, descrivere l'immagine della carta locale, e quindi il (sotto)insieme su cui è stata calcolata la curvatura. Ricordiamo che un punto $p \in \Sigma$ si dice ellittico se la curvatura di Gauss di Σ è positiva in p, etc. etc.
   (a) La sfera di raggio R $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$
   (b) L'iperboloide a una falda $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ detto anche iperboliode iperbolico, perché?
   (c) Il paraboloide di rotazione $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z\}$ detto anche paraboloide ellittico, perché?
   (d) La sella $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$ detto anche paraboloide iperbolico, perché?
   (e) L'iperboloide a due falde $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$ detto anche iperboloide ellittico, perché?
   (f) Il toro $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 = 1\}$
   (g) Mostrare inoltre che: tutti i punti della sfera sono ombellicali, tutti (ma proprio <u>tutti</u>) i punti delle *quadriche* (a)-(e) sono dello stesso tipo, mentre invece la curvatura di Gauss del toro assume tutti i segni possibili. Cercare di spiegare il fenomeno geometricamente e/o analiticamente.
   (h) Quali di queste superfici sono di rotazione?