Matematica - Roma Tre

GE310 - Istituzioni di Geometria Superiore - Prof. M.Pontecorvo

Isometrie e isometrie conformi – 9 gennaio 2019

1. Sia $\mathcal{C}$ il cilindro $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. Considerata l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & (e^{iu}, v) = (\cos u, \sin u, v) \end{array}$$

   mostrare che

   (1.1) Φ è un'isometria locale tra il piano e il cilindro che non è un'isometria globale.
   (1.2) Trovare un aperto massimale $U \subset \mathbb{R}^2$ tale che la restrizione $\Phi_{|U}$ sia un'isometria globale di spazi metrici sull'immagine e determinare l'immagine.
   (1.3) Non esiste una congruenza (cioè un movimento rigido di $\mathbb{R}^3$) che manda un aperto del cilindro $\mathcal{C}$ in un aperto di un piano affine.

2. Considerato $\mathbb{R}^2$ come spazio vettoriale Euclideo con prodotto scalare standard, mostrare che un'applicazione lineare conforme conserva gli angoli tra i vettori.

3. Abbiamo visto a lezione che se $p \in \Sigma$ è un massimo relativo della funzione $\delta = \| \cdot \|^2$ allora p è ellittico. Considerare la funzione δ sull'iperboloide a una falda

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - y^2 + 1 = 0\}.$$

   δ ammette un massimo assoluto? δ ammette un massimo relativo? δ ammette un minimo assoluto? Confrontare con il segno della curvatura di Gauss.

4. Mostrare con degli esempi e/o figure che in generale in un punto di minimo per $\delta = \| \cdot \|^2 : \Sigma \to \mathbb{R}$ la curvatura di Gauss può avere segno completamente arbitrario, cioè positivo, negativo o nullo.

5. *Il gruppo* CO_2 delle trasformazioni lineari conformi del piano $\mathbb{R}^2$ è

$$CO_2 = \{A \in \mathcal{M}_2 \mid A^t A = \lambda Id., \text{ per qualche } \lambda \neq 0\}.$$

   Mostrare che valgono le seguenti proprietà:

   (a) CO_2 è un gruppo rispetto alla moltilicazione righe per colonne.

   (b) Una matrice quadrata 2×2 commuta con la matrice $J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ se e solo se $A \in CO_2^+$. Concludere che una tale matrice è della forma $\lambda \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ per qualche $\theta \in S^1 = [0, 2\pi]/0 \sim 2\pi$.

   (c) Osservare che una matrice A appartiene a CO_2^+ se e solo se ruota tutti i vettori di uno stesso angolo θ e li dilata o li contrae di uno stesso fattore $\lambda \neq 0$.

   (d) Dimostrare che CO_2 ha due componenti connesse: CO_2^+ e CO_2^-, ciascuna di esse diffeomorfa a un cilindro.

Girare, prego →

6. Sia $\gamma(v) = (\phi(v), \psi(v)) = (e^{-v}, \int_0^v \sqrt{1-e^{-2t}}dt), v \geq 0$ la curva cosiddetta "*trattrice*". La superficie di rotazione ottenuta ruotando la trattrice, posta nel piano xz, attorno all'asse z è detta "*pseudosfera*".

   (a) Calcolare la curvatura di Gauss, in due modi diversi dopo averne giustificato l'uso: formula a p. 162, formula dell'es.1 di p. 237.

   (b) Giustificare il nome *pseudosfera*.

   (c) Esiste un'isometria locale tra un aperto della pseudosfera e un aperto del toro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 = 1\}$?

   (d) Riconoscere che la traccia di γ è effettivamente la trattrice dell'es. 4 p.7 $(\sin t, \cos t + \ln \tan \frac{t}{2})$ per $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.