Matematica - Roma Tre

GE420 - Geometria Differenziale 1 - Prof. M.Pontecorvo

9 ottobre 2012 - Esercizi sulle curve 1 - Alvin

1. *La derivata di un vettore di <u>modulo costante</u> è sempre perpendicolare al vettore stesso.* Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva liscia. Mostrare che $|\alpha(t)|$ è una costante non nulla (i.e. la traccia di α è contenuta in una sfera centrata nell'origine) se e solo se $\alpha(t)$ è ortogonale ad $\dot{\alpha}(t)$ $\forall t \in I$.

2. Sia $v = (a, b, c)$ un vettore fissato (cioè costante) e sia $I \to \mathbb{R}^3$ una curva liscia, dove $I = [0, 1]$. Usare il Primo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale per dimostrare che

$$\int_0^1 v \cdot \dot{\alpha}(t) dt = v \cdot (\alpha(1) - \alpha(0))$$

3. *Una curva liscia non-regolare.* Mostrare che l'insieme $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = |x|\}$

   (a) è la traccia di una curva regolare a tratti, ma non liscia.

   (b) è la traccia di una curva liscia. (Ispirarsi al # 10 p.24)

   (c) non può essere la traccia di una curva regolare.

4. (Do Carmo, p.10 es.8) *La lunghezza di una curva è il limite delle lunghezze delle poligonali inscritte.*

5. (Do Carmo, p.7 es.4) Sia $\alpha : (0, \pi) \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\alpha(t) = \left(\sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2}\right)$$

   dove t è l'angolo che l'asse y forma con il vettore $\alpha(t)$. La traccia di α è detta *Trattrice.* Mostrare che:

   (a) α è una curva differenziabile, regolare ovunque tranne che in $t = \pi/2$

   (b) La lunghezza del segmento sulla tangente alla trattrice tra il punto di tangenza e l'asse y è identicamente uguale a 1.

6. *Una curva infinita di lunghezza finita.* (Do Carmo, p.8 es.6) Sia $\alpha(t) = (ae^{bt} \cos t, ae^{bt} \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, con $a > 0$, $b < 0$ costanti, una curva parametrizzata. Mostrare che:

   (a) Al tendere di $t \to \infty$, la curva $\alpha(t)$ si avvicina all'origine seguendo una spirale (per questo la traccia di α è detta *spirale logaritmica*).

   (b) Al tendere di $t \to \infty$ si ha $\dot{\alpha}(t) \to (0, 0)$, e inoltre α ha lunghezza finita in $[t_0, \infty)$, i.e.

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} |\dot{\alpha}(t)| dt < \infty$$

7. Sia k il vettore $(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ e sia $\alpha(t) : I \to \mathbb{R}^3$ una curva liscia. Dimostrare che $\alpha(t)$ è contenuta in un piano affine orizzontale π (cioè $z = z_0$) se e solo se il prodotto scalare $\alpha \cdot k$ è costante (cioè non dipende da t).

Girare, prego →

8. Nello spazio Euclideo $\mathbb{R}^3$ con base ortonormale $\{i, j, k\}$ il prodotto vettoriale $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è definito estendendo per bilinearità le seguenti relazione "quaternioniche":

$$i \wedge i = j \wedge j = k \wedge k = 0$$

$$i \wedge j = -j \wedge i = k, \qquad j \wedge k = -k \wedge j = i, \qquad k \wedge i = -i \wedge k = j$$

Il *prodotto misto* $(u \wedge v) \cdot w$ di tre vettori $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ è il numero reale che si ottiene facendo il prodotto scalare del terzo con il prodotto vettoriale del primo con il secondo (nell'ordine). Mostrare che

   (a) $(u \wedge v) \cdot w$ è uguale al determinante della matrice 3×3 delle coordinate dei tre vettori u, v, w.

   (b) $(u \wedge v) \cdot w$ è uguale al volume con segno del parallelepipedo generato dai tre vettori u, v, w. Fornire un'interpretazione geometrica di questo segno.

9. $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto vettoriale è un gruppo ?

10. *Regola di Leibniz.* Siano

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t)), \qquad \text{e} \qquad w(t) = (w_1(t), w_2(t), w_3(t)),$$

due campi vettoriali lisci $u, w : I \to \mathbb{R}^3$. Dimostrare che il prodotto scalare $u \cdot w : I \to \mathbb{R}$ è una funzione liscia e che il prodotto vettoriale $u \wedge w : I \to \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale liscio. Mostrare inoltre che vale la regola di Leibniz:

$$\frac{d}{dt}(u(t) \cdot w(t)) = \dot{u}(t) \cdot w(t) + u(t) \cdot \dot{w}(t),$$
$$\frac{d}{dt}(u(t) \wedge w(t)) = \dot{u}(t) \wedge w(t) + u(t) \wedge \dot{w}(t).$$

11. Dire quali tra le seguenti basi sono positivamente orientate.

   (a) La base $\{(1, 3), (4, 2)\}$ in $\mathbb{R}^2$.

   (b) La base $\{(1, 3, 5), (2, 3, 7), (4, 8, 3)\}$ in $\mathbb{R}^3$.