Matematica - Roma Tre
GE420 - Geometria Differenziale 1
27 marzo 2012 - Superfici e Piano Tangente - Alvin
Consegnare solo due esercizi a piacere, prima del compito in classe di aprile

1. La superficie di Scherk è la superficie di tipo grafico $S \subset \mathbb{R}^3$ data da
$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; z = \ln\left(\frac{\cos x}{\cos y}\right), \; (x, y) \in A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \subset \mathbb{R}^2 \right\}$$
Trovare i punti in cui il piano tangente è orizzontale.

2. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$
$$S_a := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2 + y^2 = a + z^2\}$$
è una superficie regolare? Giustificare attentamente la risposta e disegnare S_a per almeno un valore del parametro a.

3. Quali delle seguenti applicazioni $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sono carta locale (parametrizzazione) di una superficie regolare? Giustificare attentamente.
   (6.1) $X(u, v) = (u, uv, v)$
   (6.2) $X(u, v) = (u^2, u^3, v)$
   (6.3) $X(u, v) = (u, u^2, v + v^3)$

4. (Do Carmo, p.65 es.4, 7)

5. Do Carmo, p. 80 es 7; p. 109 es. 1,2,5,7.

6. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia $d : S \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $d(p) = |p - p_0|$, dove $p \in S$, $p_0 \in \mathbb{R}^3$, $p_0 \notin S$; cioè d è la distanza di p da un punto fissato p_0 non in S. Mostrare che d è differenziabile.

7. Mostrare che l'iperboloide a una falda $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$ è diffeomorfo al cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$, esibendo un diffeomorfismo esplicito.

8. Dimostrare che, date due superfici regolari S_1, $S_2 \subset \mathbb{R}^3$, un'applicazione $f : S_1 \longrightarrow S_2$ è un diffeomorfismo se e solo se f è liscia, biiettiva, e il suo differenziale df_p è un'applicazione lineare invertibile $\forall p \in S_1$

9. L'immagine dell'applicazione
$$\begin{array}{rccc} \mathbf{x} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & (u \cos v, u \sin v, v) \end{array}$$
è una superficie regolare detta Elicoide.
   (a) Dimostrare che $\mathbf{x}$ è una carta locale e determinare $T_p\Sigma$ al variare di p.
   (b) Notare che la proiezione ortogonale $\pi : \Sigma \to \mathbb{R}^2$ sul piano orizzontale non è iniettiva e quindi π non è un diffeomorfismo.
   (c) Per quali punti $p \in \Sigma$ la proiezione ortogonale π è un diffeomorfismo locale?