Matematica - Roma Tre

GE420 - Geometria Differenziale 1 - Prof. M.Pontecorvo

23 OTTOBRE 2012 - ESERCIZI SU CURVE 2 E SUPERFICI - ALVIN

CONSEGNARE TRE ESERCIZI ENTRO IL 31 OTTOBRE, SCELTI TRA # 3,5,6,7,8,11,12,13,14

1. (Do Carmo, p. 25 es. 12, oppure Abate-Tovena p.27) *Formule molto utili per calcolare curvatura e torsione* senza *ascissa curvilinea.*

2. (Do Carmo, p. 24 es. 10) *Esempio di curva regolare, NON-biregolare con torsione identicamente nulla ma che non è piana.*

3. *Sul teorema fondamentale della geometria locale delle curve.*

   (a) Dimostrare che la circonferenza $\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$ di centro l'origine e raggio R ha curvatura costante $k = \pm\frac{1}{R}$ dove il segno dipende dal verso di percorrenza.

   (b) Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare, con curvatura $k(s) = k_0 \in \mathbb{R}$ costante assegnata. Cosa si può dire sulla traccia di α?

4. Determinare l'ascissa curvilinea delle seguenti curve:

   (a) L'Elica cilindrica di raggio a e passo b.

   (b) La Cardioide i.e. la curva parametrizzata $\mathcal{C} = \{(\cos t(1-\cos t), \sin t(1-\cos t)) \in \mathbb{R}^2 \,:\, t \in (0, 2\pi)\}$

   (c) La Cicloide, i.e. la curva parametrizzata $\mathcal{C}_1 = \{(t - \sin t, 1 - \cos t) \in \mathbb{R}^2 \,:\, t \in (0, 2\pi)\}$

   (d) L'Astroide $\mathcal{C}_2 = \left\{\left(\cos^3 t, \sin^3 t\right) \in \mathbb{R}^2 \,:\, t \in (0, \frac{\pi}{2})\right\}$

5. (Do Carmo, p.23 es.6) *I Movimenti Rigidi dello spazio Euclideo preservano la curvatura e la torsione delle curve.*

Girare, prego →

6. La superficie di Scherk è la superficie di tipo grafico $S \subset \mathbb{R}^3$ data da

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = \ln\left(\frac{\cos x}{\cos y}\right), \ (x, y) \in A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \subset \mathbb{R}^2 \right\}$$

Trovare i punti in cui il piano tangente è orizzontale.

7. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$S_a := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = a + z^2\}$$

è una superficie regolare? Giustificare attentamente la risposta e disegnare S_a per almeno un valore del parametro a.

8. Per ciascuna delle seguenti applicazioni $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

i) trovare una funzione "implicita" di tre variabile $F(x, y, z)$ tale che $Im\, \mathbf{x} \subset \{F(x, y, z) = 0\}$

ii) determinare quali sono carta locale (parametrizzazione) di una superficie regolare

1) $\mathbf{x}(u, v) = (u, uv, v)$

2) $\mathbf{x}(u, v) = (u^2, u^3, v)$

3) $\mathbf{x}(u, v) = (u, u^2, v + v^3)$

9. (Do Carmo, p.65 es.4, 7)

10. Do Carmo, p. 80 es 7; p. 109 es. 1,2,5,7.

11. Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare qualsiasi e sia $d : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $d(p) = |p - p_0|$, dove $p \in \Sigma$, $p_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$; cioè d è la distanza di p da un punto fissato p_0 non contenuto in Σ. Mostrare che d è una funzione liscia su Σ.

12. Mostrare che l'iperboloide a una falda $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$ è diffeomorfo al cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$, esibendo un diffeomorfismo esplicito.

13. Dimostrare che, date due superfici regolari S_1, $S_2 \subset \mathbb{R}^3$, un'applicazione $f : S_1 \longrightarrow S_2$ è un diffeomorfismo se e solo se f è liscia, biiettiva, e il suo differenziale df_p è un'applicazione lineare invertibile $\forall p \in S_1$

14. L'immagine dell'applicazione

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{x} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & (u \cos v, u \sin v, v) \end{array}$$

è una superficie regolare detta Elicoide.

(a) Dimostrare che $\mathbf{x}$ è una carta locale e determinare $T_p\Sigma$ al variare di p.

(b) Notare che la proiezione ortogonale $\pi : \Sigma \to \mathbb{R}^2$ sul piano orizzontale non è iniettiva e quindi π non è un diffeomorfismo.

(c) Per quali punti $p \in \Sigma$ la proiezione ortogonale π è un diffeomorfismo locale?