

Matematica - Roma Tre
GE420 - Geometria Differenziale 1

26 APRILE 2012 - CURVATURA DELLE SUPERFICI - ALVIN

Consegnare solo due esercizi a piacere, a metà maggio

1. Dimostrare che sono ben definiti la traccia e il determinante di un endomorfismo lineare.

2. Sia Σ una superficie in \mathbb{R}^3 e sia $v \in S^1 \subset T_p\Sigma$ un vettore unitario i.e. $v = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$ dove e_1, e_2 sono base ortonormale di $T_p\Sigma$ e direzioni principali nel punto p , cioè autovettori dell'operatore dN che ha sempre due autovalori reali $k_1 \leq k_2$. Per il teorema di Meusnier la curvatura normale k_n di una curva $\gamma \subset \Sigma$ con $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = v$ dipende solo dalla direzione di $\dot{\gamma}$ cioè $k_n(\theta) = k_n(-\theta)$. Abbiamo visto che la seconda forma fondamentale calcola tutte le curvature normali e che ponendo $f(\theta) := k_n(\theta)$ otteniamo la seguente funzione di una variabile di periodo π :

$$\begin{aligned} f : [0, \pi) &\longrightarrow [-k_2, -k_1] \\ \theta &\longmapsto -k_1 \cos^2 \theta - k_2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

I punti di max e min sono detti direzioni principali mentre gli zeri di f (cioè le direzioni in cui la curvatura normale si annulla) sono detti *direzioni asintotiche*. Dopo aver tracciato un grafico qualitativo della funzione $f(\theta)$, dimostrare che si hanno:

- (a) Zero direzioni asintotiche se e solo se il punto p è ellittico.
 - (b) Esattamente una direzione asintotica se e solo se il punto è parabolico
 - (c) Esattamente due direzioni asintotiche se e solo se il punto è iperbolico
 - (d) Tre direzioni asintotiche se e solo se infinite direzioni asintotiche se e solo se il punto è planare
-
3. Cercare sul libro di testo una parametrizzazione - coordinate locali - per ciascuna delle seguenti superfici regolari e calcolarne la curvatura

$$dN = -II \cdot I^{-1}$$

trovare cioè la matrice 2×2 che rappresenta la curvatura rispetto alla base del piano tangente in quelle coordinate. Ricordiamo che un punto $p \in \Sigma$ si dice ellittico se la curvatura di Gauss di Σ è positiva in p , etc. etc.

- (2.1) La sfera di raggio R $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$
- (2.2) L'iperboloide a una falda $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ detto anche iperboloide iperbolico, perché?
- (2.3) Il paraboloide di rotazione $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z\}$ detto anche paraboloide ellittico, perché?
- (2.4) La sella $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$ detto anche paraboloide iperbolico, perché?
- (2.5) L'iperboloide a due falde $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$ detto anche iperboloide ellittico, perché?
- (2.6) Il toro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 = 1\}$
- (2.7) Mostrare inoltre che: tutti i punti della sfera sono ombellicali, tutti i punti delle *quadriche* (2.1)-(2.5) sono dello stesso tipo, mentre invece la curvatura di Gauss del toro assume tutti i segni possibili.

4. Mostrare che la curvatura di Gauss è ben definita anche su una superficie non-orientabile. Calcolare la curvatura di Gauss del Nastro di Möbius. Ci sono punti parabolici? (Sugg.: Usare Mathematica).
5. Determinare i punti critici della funzione “altezza dal piano orizzontale $\{z = 0\}$ ” sulle seguenti superfici e discuterne la natura; trovare cioè la segnatura dell’Hessiano.

(a) La “Sella di scimmia” data dalla carta locale

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\longmapsto (u, v, u^3 - 3v^2u) \end{aligned}$$

(b) La “Sella” data dalla carta locale

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (u, v, uv) \end{aligned}$$

(c) La superficie Σ data dalla carta locale

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (u, v, v^4 - v^2(e^{2u} + e^{-2u})) \end{aligned}$$

(d) La superficie Σ data dalla carta locale

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (u, v, v^4 - 4v^2 + 4u^2 - u^4) \end{aligned}$$

(e) Il toro di rotazione $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 = 1, z \geq 0\}$

6. Abbiamo visto a lezione che se $p \in \Sigma$ è un massimo relativo della funzione $\delta = \|\cdot\|^2$ allora p è ellittico. Considerare la funzione δ sull’iperboloide a una falda

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - y^2 + 1 = 0\}.$$

δ ammette un massimo assoluto? δ ammette un massimo relativo? δ ammette un minimo assoluto?

7. Mostrare con degli esempi che in generale in un punto di minimo per $\delta = \|\cdot\|^2 : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ la curvatura di Gauss può avere segno completamente arbitrario, cioè positivo, negativo o nullo.