Matematica - Roma Tre

GE420 - Geometria Differenziale 1 - Prof. M.Pontecorvo

4 dicembre 2012 - Esercizi su curve e superfici - 3 - Alvin

Consegnare tre esercizi entro il 20 dicembre

1. Dimostrare che sono ben definiti la traccia e il determinante di un endomorfismo lineare.

2. Sia Σ una superficie in $\mathbb{R}^3$ e sia $v \in S^1 \subset T_p\Sigma$ un vettore unitario i.e. $v = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$ dove e_1, e_2 sono base ortonormale di $\in T_p\Sigma$ e direzioni principali nel punto p, cioè autovettori dell'operatore dN che ha sempre due autovalori reali $k_1 \leq k_2$. Per il teorema di Meusnier la curvatura normale k_n di una curva $\gamma \subset \Sigma$ con $\gamma(0) = p$ e $\dot\gamma(0) = v$ dipende solo dalla direzione di $\dot\gamma$ cioè $k_n(\theta) = k_n(-\theta)$. Abbiamo visto che la seconda forma fondamentale calcola tutte le curvature normali e che ponendo $f(\theta) := k_n(\theta)$ otteniamo la seguente funzione di una variabile di periodo π:

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,\pi) & \longrightarrow & [-k_2, -k_1] \\ & \theta & \longmapsto & -k_1\cos^2\theta - k_2\sin^2\theta \end{array}$$

I punti di max e min sono detti direzioni principali mentre gli zeri di f (cioè le direzioni in cui la curvatura normale si annulla) sono detti *direzioni asintotiche*. Dopo aver tracciato un grafico qualitativo della funzione $f(\theta)$, dimostrare che si hanno:

   (a) Zero direzioni asintotiche se e solo se il punto p è ellittico.

   (b) Esattamente una direzione asintotica se e solo se il punto è parabolico

   (c) Esattamente due direzioni asintotiche se e solo se il punto è iperbolico

   (d) Tre direzioni asintotiche se e solo se infinite direzioni asintotiche se e solo se il punto è planare

3. Cercare sul libro di testo una parametrizzazione - coordinate locali - per ciascuna delle seguenti superfici regolari e calcolarne la curvatura

$$dN = -II \cdot I^{-1}$$

trovare cioè la matrice 2×2 che rappresenta la curvatura rispetto alla base del piano tangente in quelle coordinate. Ricordiamo che un punto $p \in \Sigma$ si dice ellittico se la curvatura di Gauss di Σ è positiva in p, etc. etc.
(2.1) La sfera di raggio R $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$
(2.2) L'iperboloide a una falda $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ detto anche iperboliode iperbolico, perché?
(2.3) Il paraboloide di rotazione $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z\}$ detto anche paraboloide ellittico, perché?
(2.4) La sella $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$ detto anche paraboloide iperbolico, perché?
(2.5) L'iperboloide a due falde $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$ detto anche iperboloide ellittico, perché?
(2.6) Il toro $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - 3)^2 = 1\}$
(2.7) Mostrare inoltre che: tutti i punti della sfera sono ombellicali, tutti i punti delle *quadriche* (2.1)-(2.5) sono dello stesso tipo, mentre invece la curvatura di Gauss del toro assume tutti i segni possibili.

Girare, prego →

4. Mostrare che la curvatura di Gauss è ben definita anche su una superficie non-orientabile. Calcolare la curvatura di Gauss del Nastro di Möbius. Ci sono punti parabolici? (Sugg.: Usare Mathematica).

5. Determinare i punti critici della funzione "altezza dal piano orizzontale $\{z = 0\}$" sulle seguenti superfici e discuterne la natura; trovare cioè la segnatura dell'Hessiano.

   (a) La "Sella di scimmia" data dalla carta locale

   $$\mathbf{x}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \longmapsto & (u, v, u^3 - 3v^2u) \end{array}$$

   (b) La "Sella" data dalla carta locale

   $$\mathbf{x}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (u, v, uv) \end{array}$$

   (c) La superficie Σ data dalla carta locale

   $$\mathbf{x}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (u, v, v^4 - v^2(e^{2u} + e^{-2u})) \end{array}$$

   (d) La superficie Σ data dalla carta locale

   $$\mathbf{x}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (u, v, v^4 - 4v^2 + 4u^2 - u^4) \end{array}$$

   (e) Il toro di rotazione $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - 3)^2 = 1,\ z \geq 0\}$

6. Abbiamo visto a lezione che se $p \in \Sigma$ è un massimo relativo della funzione $\delta = \|\cdot\|^2$ allora p è ellittico. Considerare la funzione δ sull'iperboloide a una falda

   $$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - y^2 + 1 = 0\}.$$

   δ ammette un massimo assoluto? δ ammette un massimo relativo? δ ammette un minimo assoluto?

7. Mostrare con degli esempi che in generale in un punto di minimo per $\delta = \|\cdot\|^2 : \Sigma \to \mathbb{R}$ la curvatura di Gauss può avere segno completamente arbitrario, cioè positivo, negativo o nullo.