

**Matematica - Roma Tre**  
**GE420 - Geometria Differenziale 1**

ISOMETRIE DI SUPERFICI - ALVIN - (22-5-12)

**Consegnare solo due esercizi a piacere, entro il 7 giugno**

1. Sia  $\mathcal{C}$  il cilindro  $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ . Considerata l'applicazione

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto (e^{iu}, v) \end{aligned}$$

mostrare che

- (1.1)  $\varphi$  è un'isometria locale.
  - (1.2)  $\varphi$  non è un'isometria globale.
  - (1.3) Se  $U := (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$  allora  $\varphi|_U$  è un'isometria globale sull'immagine.
  - (1.4) Non esiste una congruenza (cioè un movimento rigido di  $\mathbb{R}^3$ ) che manda  $\mathcal{C}$  in  $U$ .
2. Considerato  $\mathbb{R}^n$  come spazio vettoriale Euclideo con prodotto scalare standard, mostrare che un'applicazione lineare è conforme se e solo se conserva gli angoli.

3. Il gruppo  $CO_2$  delle trasformazioni lineari conformi del piano  $\mathbb{R}^2$  è

$$CO_2 = \{A \in \mathcal{M}_2 \mid A^t A = \lambda Id., \text{ per qualche } \lambda \neq 0\}.$$

Mostrare che valgono le seguenti proprietà:

- (a)  $CO_2$  è un gruppo rispetto alla moltiplicazione righe per colonne.
- (b)  $CO_2$  ha due componenti connesse.
- (c) Una matrice  $A$  appartiene a  $CO_2$  se e solo se ruota tutti i vettori di uno stesso angolo  $\theta$  e li dilata o li contrae di uno stesso fattore  $\lambda \neq 0$ .
- (d) Una matrice quadrata  $2 \times 2$  commuta con la matrice  $J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  se e solo se  $A \in CO_2$  e inoltre  $\det A > 0$ .

Concludere che una tale matrice è della forma  $\lambda \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  per qualche  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

4. (Do Carmo, pag. 230 es. 16) Siano  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  coordinate geografiche sulla sfera unitaria, con  $U = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$  e  $X(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ .

Operando poi il seguente cambio di coordinate:

$$\log \tan \frac{\theta}{2} = u, \quad \varphi = v.$$

otteniamo una nuova parametrizzazione di  $X(U) = V$  data da

$$Y(u, v) = (\cosh^{-1} u \cos v, \cosh^{-1} u \sin v, \tanh u).$$

Calcolare la prima forma fondamentale in queste nuove coordinate. Osservare quindi che  $Y^{-1}$  è un'applicazione conforme che manda meridiani e paralleli di  $S^2$  in rette del piano, detta "Proiezione di Mercatore". Per l'esercizio 5 conserva gli angoli (ma NON le distanze, dimostrare!) e quindi può essere usata per tracciare le rotte degli aerei o delle navi.

5. Sappiamo (cfr. Do Carmo pag 237, es 1) che se  $\mathbf{x}(u, v)$  sono coordinate locali ortogonali (i.e.  $F=0$ ) allora si ha

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right).$$

- (i) Mostrare che non esistono superfici  $\mathbf{x}(u, v)$  tali che  $E = G = 1$ ,  $F = 0$  e  $e = 1$ ,  $g = -1$ ,  $f = 0$ .
- (ii) Esiste una superficie  $\mathbf{x}(u, v)$  con  $E = 1$ ,  $F = 0$ ,  $G = \cos^2 u$  e  $e = \cos^2 u$ ,  $f = 0$ ,  $g = 1$ ?
6. Sia  $\gamma(v) = (\varphi(v), \psi(v)) = (e^{-v}, \int_0^v \sqrt{1 - e^{-2t}} dt)$ ,  $v \geq 0$  la curva cosiddetta “*trattrice*”. La superficie di rotazione ottenuta ruotando la *trattrice*, posta nel piano  $xz$ , attorno all’asse  $z$  è detta “*pseudosfera*”. Utilizzando la formula che da la curvatura di Gauss per superfici di rotazione (Do Carmo p. 162), verificare che la *pseudosfera* ha curvatura di Gauss costante negativa:  $K = -1$ .