UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Prova scritta del 14-7-2006 - a.a. 2005-2006

*Cognome*___________________ *Nome*_________________________

*Numero di matricola*___________________

Avvertenze:

1. Per il primo esonero svolgere gli esercizi 1,2,3,4;

2. Per il secondo esonero svolgere gli esercizi 5,6,7,8;

3. Per lo scritto svolgere gli esercizi 1,2,4,5,7,8;

4. Barrare la casella "scritto" o la casella "esonero" a seconda di quale opzione si vuole esercitare (una sola scelta è possibile);

5. Una volta consegnato per lo scritto si **cancella** un eventuale voto di esonero; analogamente una volta consegnato per un esonero si **cancella** il voto dell'esonero;

6. Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri nè appunti.

Da valutare come: **scritto** ◯ **primo esonero** ◯ **secondo esonero** ◯

Valutazione

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
Totale scritto	
Totale primo esonero	
Totale secondo esonero	

1. (a) Si definiscano la nozione di dimensione (finita) di uno spazio vettoriale reale e la nozione di sottospazio.

Sia ora V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e W un suo sottospazio.

(b) Si enunci il risultato che relaziona le dimensioni di V e di W;

(c) si dimostri tale risultato.

2. Determinare per quali valori $h \in \mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + hX_3 + X_4 = 0 \\ X_1 + hX_3 + X_4 = 1 \\ hX_1 + X_3 - hX_4 = 0 \\ X_1 - X_2 + X_3 = 0 \end{cases}$$

e calcolarne esplicitamente le soluzioni, utilizzando esclusivamente operazioni elementari.

3. Sia k un numero reale e si considerino le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & k+1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino i valori di k per i quali A può essere trasformata in B con sole operazioni elementari;

(b) per i valori di k individuati sopra, si determini una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B.

4. Sia h un numero reale. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

e

$$W_h = < (1,1,1,2), (0,1,0,-1), (1,-2,1,h) > .$$

(a) Si determinino le dimensioni di U, W_h e si scrivano esplicitamente due basi di tali sottospazi;

(b) si determinino le dimensioni di $W_h + U$ e di $W_h \cap U$;

(c) si determinino (se esistono) i valori di h per i quali

$$W_h \oplus U = \mathbb{R}^4.$$

5. Siano V, W due spazi vettoriali reali e $F : V \to W$ un'applicazione lineare.

(a) Si definiscano il nucleo e l'immagine di F e se ne indichino le principali proprietà;

(b) si enunci il teorema di omomorfismo tra spazi vettoriali;

(c) si dimostri tale risultato.

6. Sia a un numero reale e sia A uno spazio affine di dimensione 3 su uno spazio vettoriale reale V e sia O, e_1, e_2, e_3 un riferimento affine. Si considerino i tre piani di equazione:

$$\pi_1 : X_1 + X_2 + X_3 + 1 = 0; \pi_2 : 2X_1 - X_2 - X_3 + 2 = 0; \pi_3 : 7X_1 + X_2 + X_3 = a.$$

(a) Si determinino i valori di a per i quali i tre piani appartengono allo stesso fascio;

(b) per tali valori di a si scrivano le equazioni della retta comune in forma parametrica;

(c) si determinino i valori di a (se esistono) per i quali esiste un piano parallelo a π_3 ma che non interseca $\pi_1 \cap \pi_2$.

7. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 1$, $F : V \to V$ un'applicazione lineare, $A \in M_n$ una matrice.

(a) Dimostrare che se esiste una base $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ di V tale che A è la matrice di F nella base e, allora $r(A) = \dim \mathrm{Im}(F)$.

(b) Sia ora $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $E = \{E_1, E_2\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$ e sia $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice di F nella base E. Si trovi una matrice $A \in M_2$ tale che $r(A) = r(B)$ ma non esiste una base $e = \{e_1, e_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che A è la matrice di F nella base e.

8. Siano $v_1 = (1, 0, 0, -1), v_2 = (1, 0, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che $v_1 \in N(F), v_2 \in N(F), F(E_1) = E_1 + E_3 + E_4, F(E_2) = cE_3$ per qualche numero reale c, dove E_1, E_2, E_3, E_4 è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare una matrice di F;

(b) trovare basi per gli autospazi di F;

(c) determinare i valori di c per i quali F è diagonalizzabile.